

Capítulo 3

Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Versión Beta 1.0

www.mathspace.jimdo.com

Introducción

Permanentemente es necesario describir en términos matemáticos el comportamiento de algunos sistemas o fenómenos de la vida real, estos sistemas pueden ser biológicos, físicos, sociológicos, psicológicos, químicos o económicos.

La descripción matemática de un sistema de fenómenos se denomina *modelo matemático*. Desarrollar un modelo matemático es interpretar, lo mejor posible la realidad a través de ciertas expresiones matemáticas.

3.1. Modelos lineales

3.1.1. Crecimiento y decaimiento

El problema con valores iniciales:

$$\frac{dx}{dt} = kx(t); \quad x(t_0) = x_0$$

Donde k es una constante de proporcionalidad, es una E.D que se usa para modelar el crecimiento de poblaciones en pequeños períodos de tiempo. Por ejemplo, en aplicaciones biológicas, la razón de crecimiento de ciertas poblaciones en cortos períodos de tiempo es proporcional a la población presente en el tiempo t .

Ejemplo 1: Un cultivo tiene un número P_0 de bacterias, en $t = 1h$, el número de bacterias es $\frac{3}{2}P_0$. Si la razón de crecimiento es proporcional al número de bacterias $P(t)$ en el tiempo t , determine el tiempo necesario para que se triplique el número de bacterias.

Solución:

En el desarrollo de una dinámica poblacional se supone que para el tiempo en el cual se aplica el modelo ($t = 0$), la población presente va a ser una población inicial, puesto que es necesario partir

con una cantidad establecida. Es decir: Para $t = 0$ se tiene $P(0) = P_0$, donde P_0 representa la población inicial.

Sean

P : El número de bacterias en el instante t .

k : Constante de proporcionalidad.

La ecuación para el modelo sería:

$$\frac{dP}{dt} = kP(t); \quad P(0) = P_0$$

De donde:

$$\frac{dP}{dt} - kP(t) = 0 \quad (1)$$

Resolvemos la ecuación (1) por el método del factor integrante. Para este caso el factor integrante es:

$$e^{\int(-k)dt} = e^{-kt}$$

Multiplicando (1) por el factor integrante, se tiene:

$$e^{-kt} \left[\frac{dP}{dt} - kP(t) \right] = e^{-kt}(0)$$

$$\frac{d}{dt}[e^{-kt}P(t)] = 0$$

Integrando:

$$\int d[e^{-kt}P(t)] = \int 0dt$$

$$e^{-kt}P(t) = c$$

Despejando $P(t)$:

$$P(t) = ce^{kt}$$

Determinamos c , considerando la condición inicial $P(0) = P_0$:

$$\begin{aligned} P(0) &= ce^{k(0)} \\ P_0 &= c \end{aligned}$$

De ahí que:

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Determinamos k , considerando la condición $P(1) = \frac{3}{2}P_0$:

$$\begin{aligned} P(1) &= P_0 e^{k(1)} \\ \frac{3}{2}P_0 &= P_0 e^{k(1)} \\ \frac{3}{2} &= e^k \\ k &= \ln\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

De ahí que:

$$k \approx 0,41$$

Por tanto:

$$P(t) = P_0 e^{0,41t}$$

Ya tenemos P en función de t , así que respondemos la pregunta.

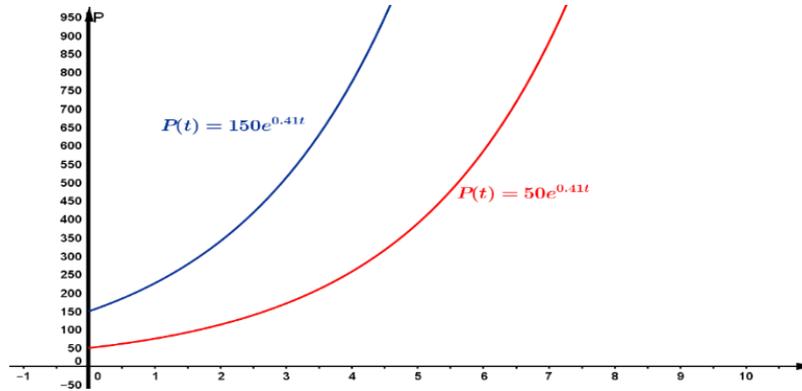
Para determinar el tiempo en que se ha triplicado el número de bacterias ($P(t) = 3P_0$), resolvemos:

$$3P_0 = P_0 e^{0,41t}$$

Se despeja t , con lo que se obtiene: $t \approx 2,68$.

Luego, el número de bacterias se ha triplicado en aproximadamente 2,68 horas.

La representación gráfica de la función que representa el modelo para dos valores arbitrarios de P_0 ($P_0 = 50$ y $P_0 = 150$) es:



■ Fin del Ejemplo 1.

Ejemplo 2: Dada la ecuación diferencial, que representa la razón de cambio del crecimiento de cierta población a través del tiempo:

$$\frac{dP}{dt} = (kcost)P(t)$$

Analice e interprete la solución de esta ecuación si después de 10 años la población se reduce a la mitad.

Solución:

Para $t = 0$ se tiene $P(0) = P_0$, donde P_0 representa la población inicial. (Tal como ocurre en el ejemplo anterior).

Sean

P : El número de miembros de la población en el instante t .

k : Constante de proporcionalidad.

La ecuación para el modelo sería:

$$\frac{dP}{dt} = (kcost)P(t); \quad P(0) = P_0$$

Tenemos entonces:

$$\frac{dP}{dt} = (kcost)P(t) \quad (1)$$

Resolvemos la ecuación (1) por el método de variables separables.

Separamos variables:

$$\frac{dP}{P(t)} = (kcost)dt$$

Integramos:

$$\int \frac{dP}{P(t)} = \int (kcost)dt$$
$$\text{Ln}|P(t)| = ksent + c_1$$

Despejando $P(t)$:

$$e^{\text{Ln}|P(t)|} = e^{ksent+c_1}$$
$$P(t) = e^{c_1} e^{ksent}$$

Haciendo $c = e^{c_1}$ se tiene:

$$P(t) = c e^{ksent}$$

Determinamos c , considerando la condición inicial $P(0) = P_0$:

$$P(0) = c e^{ksen(0)}$$
$$P_0 = c$$

De ahí que:

$$P(t) = P_0 e^{ksent}$$

Determinamos k , considerando la condición $P(10) = \frac{1}{2}P_0$:

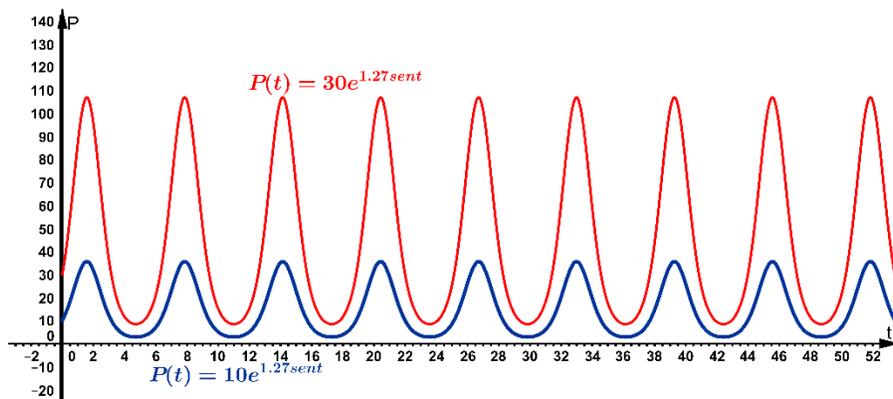
$$P(10) = P_0 e^{ksen(10)}$$
$$\frac{1}{2}P_0 = P_0 e^{ksen(10)}$$
$$\frac{1}{2} = e^{-0,54k}$$
$$\text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) = \text{Ln}(e^{-0,54k})$$
$$k \approx 1,27$$

Por tanto:

$$P(t) = P_0 e^{1,27sent}$$

Ya tenemos P en función de t así que analizamos la solución de la ecuación diferencial dada.

La representación gráfica de la función que representa el modelo para dos valores arbitrarios de P_0 ($P_0 = 10$ y $P_0 = 30$) es:



Mediante la gráfica podemos observar que la solución de la ecuación diferencial representa una población con comportamiento periódico, es decir que crece y decrece en intervalos de tiempo.

Este tipo de comportamiento en los seres vivos describe algunos fenómenos como la actividad del corazón, respiración, ciclos circadianos, etc cuyas representaciones gráficas son del tipo sinusoidal.

Un tipo de población que describiría esta ecuación diferencial sería la población que padece tiempos de hambrunas, otro tipo de población de seres vivos que describiría sería por ejemplo, una población de animales acechada por depredadores.

■ Fin del Ejemplo 2.

Observación: La función exponencial e^{kt} aumenta conforme crece t para $k > 0$ y disminuye conforme crece t para $k < 0$. Así, los problemas que describen el crecimiento como poblaciones, bacterias o capital, se caracterizan por un valor positivo de k , mientras que los problemas relacionados con decaimiento como desintegración radiactiva tienen un valor de k negativo.

De esta manera, decimos que k es una constante de crecimiento ($k > 0$) o una constante de decaimiento ($k < 0$).

Vida Media:

En física, la Vida Media (V.M) es una medida de la estabilidad de una sustancia radiactiva. Es el tiempo que tarda en desintegrarse o transmutarse en otro elemento la mitad de los átomos en una muestra inicial A_0 . Mientras mayor sea la vida media de una sustancia, se dice que esta es más estable.

3.1.2. Desintegración radiactiva

La teoría de fechado con carbono, se basa en que el isótopo carbono 14 (C-14) se produce en la atmósfera por acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno.

La razón de la cantidad de C-14 con el carbono ordinario en la atmósfera se considera constante y en consecuencia, la cantidad proporcional del isótopo presente en todos los organismos vivos es igual al de la atmósfera. Cuando muere un organismo cesa la absorción del C-14 ya sea por respiración o alimentación. Así, al comparar la cantidad proporcional de C-14 con la razón constante que hay en la atmósfera, es posible obtener una estimación razonable de la edad de dicho organismo.

Nota: La V.M del C-14 radiactivo es aproximadamente de 5600 años.

Isótopo:
Átomo
cuyo
núcleo
tiene el
mismo
número de
protones
pero
diferente
número de
neutrones.

Ejemplo 3: Se encuentra que un hueso fosilizado contiene la milésima parte de la cantidad de C-14 en la materia viva del entorno. Determine la edad del fósil.

Solución:

Sean

A : Masa de C-14 presente en el instante t .

k : Constante de proporcionalidad.

La ecuación para el modelo sería:

$$\frac{dA}{dt} = kA(t); \quad A(0) = A_0$$

Tenemos entonces:

$$\frac{dA}{dt} = kA(t) \quad (1)$$

Resolvemos la ecuación (1) con lo que se obtiene (Verificarlo):

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

Determinamos k , considerando que la V-M del C-14 radiactivo es aproximadamente 5600 años, es decir: $A(5600) = \frac{1}{2}A_0$.

$$\begin{aligned}A(5600) &= \frac{1}{2}A_0 \\A_0 e^{k(5600)} &= \frac{1}{2}A_0 \\e^{5600k} &= \frac{1}{2} \\Ln(e^{5600k}) &= Ln\left(\frac{1}{2}\right) \\k &\approx -0.00012378\end{aligned}$$

Por tanto:

$$A(t) = A_0 e^{-0.00012378t}$$

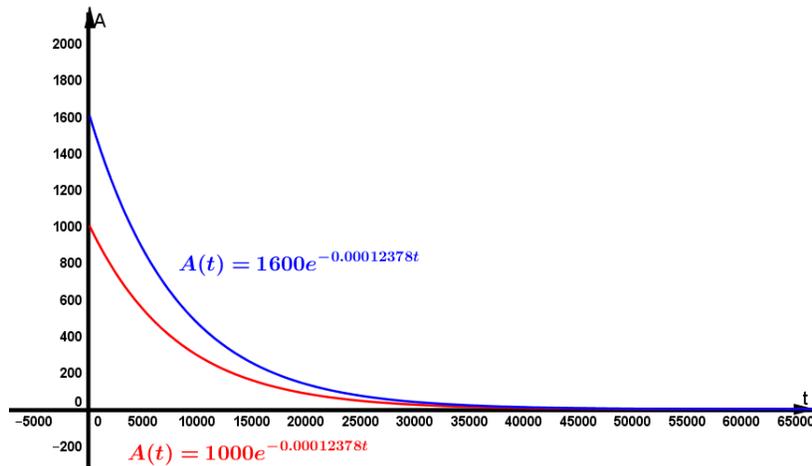
Ya tenemos la cantidad de C-14 en función del tiempo, así que respondemos:

Para determinar la edad media del fósil, consideremos que un hueso fosilizado contiene la milésima parte de la cantidad de C-14 encontrada en la materia viva, es decir: $A(t) = \frac{1}{1000}A_0$. Esto es:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1000}A_0 &= A_0 e^{-0.00012378t} \\1000^{-1} &= e^{-0.00012378t} \\Ln(1000^{-1}) &= Ln(e^{-0.00012378t}) \\t &\approx 55.800\end{aligned}$$

Luego, la edad del fósil es de aproximadamente 55.800 años.

La representación gráfica de la función que representa el modelo para dos valores arbitrarios de A_0 ($A_0 = 1000$ y $A_0 = 1600$) es:



■ Fin del Ejemplo 3.

Ejemplo 4: Precise la edad aproximada de una pieza de madera quemada, si se determinó que se había desintegrado el 85.5% del C-14 encontrado en los árboles vivos del mismo tipo.

Solución: (Al igual que en el ejemplo anterior)

Sean

A : Masa de C-14 presente en el instante t .

k : Constante de proporcionalidad.

La ecuación para el modelo sería:

$$\frac{dA}{dt} = kA(t); \quad A(0) = A_0$$

Tenemos entonces:

$$\frac{dA}{dt} = kA(t) \quad (1)$$

Resolvemos la ecuación (1) con lo que se obtiene (Verificarlo):

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

Con lo que llegamos a:

$$A(t) = A_0 e^{-0.00012378t}$$

Como se desintegra el 85.5% del C-14, entonces resta el 14.5%, es decir: $A(t) = 0.145A_0$. De ahí que:

$$\begin{aligned}
0.145A_0 &= A_0 e^{-0.00012378t} \\
0.145 &= e^{-0.00012378t} \\
\ln(0.145) &= \ln(e^{-0.00012378t}) \\
t &\approx 15.600,43
\end{aligned}$$

Por tanto, la madera tiene aproximadamente 15.600 años.

■ Fin del Ejemplo 4.

3.1.3. Ley de Newton de enfriamiento/calentamiento

La ley de Newton del enfriamiento/calentamiento de un objeto, se expresa con la E.D.L de primer orden:

$$\frac{dT}{dt} = k[T(t) - T_m]$$

Donde k es una constante de proporcionalidad,

$T(t)$ es la temperatura del objeto y

T_m es la temperatura ambiente, es decir, la temperatura del medio que rodea el objeto.

Ejemplo 5: En un proceso de preparación de harina de yuca, al sacar el producto del horno, su temperatura es de 75°C , tres minutos después la temperatura ha descendido a 50°C . ¿Cuánto tiempo le tomará al producto enfriarse hasta la temperatura ambiente de 21°C ?

Solución:

Sean

$T(t)$: Temperatura del producto.

T_m : Temperatura ambiente (21°C).

k : Constante de proporcionalidad.

La ecuación para el modelo sería:

$$\frac{dT}{dt} = k[T(t) - T_m]; \quad T(0) = 75$$

Tenemos entonces:

$$\frac{dT}{dt} = k[T(t) - 21] \quad (1)$$

Resolvemos (1) por el método de separación de variables:

Separamos variables:

$$\frac{dT}{T(t) - 21} = kdt$$

Integramos:

$$\int \frac{dT}{T(t) - 21} = \int kdt$$
$$\text{Ln}|T(t) - 21| = kt + c_1$$

Despejando $T(t)$:

$$e^{\text{Ln}|T(t)-21|} = e^{kt+c_1}$$
$$T(t) - 21 = e^{c_1} e^{kt}$$

Haciendo $c = e^{c_1}$ se tiene:

$$T(t) = ce^{kt} + 21$$

Determinamos c , considerando la condición inicial $T(0) = 75$:

$$T(0) = ce^{k(0)} + 21$$
$$75 = c + 21$$
$$c = 54$$

De ahí que:

$$T(t) = 54e^{kt} + 21$$

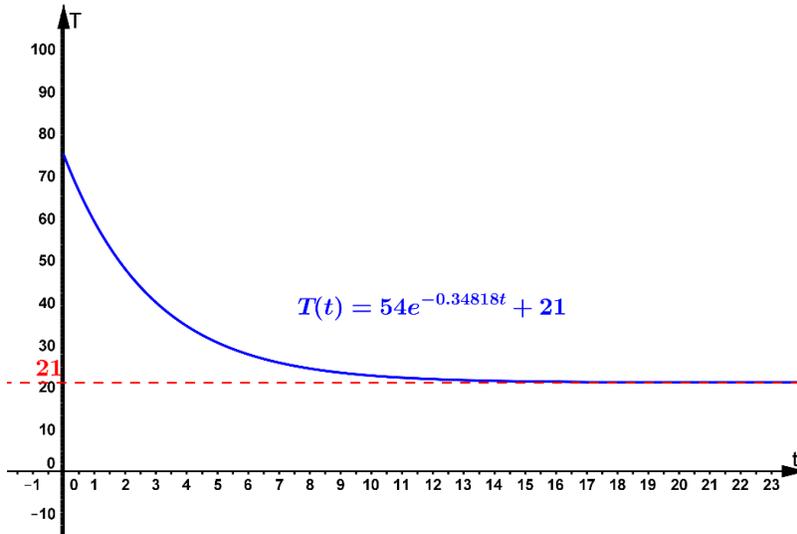
Determinamos k , considerando la condición $T(3) = 50$:

$$T(3) = 54e^{k(3)} + 21$$
$$50 = 54e^{3k} + 21$$
$$19 = 54e^{3k}$$
$$\frac{19}{54} = e^{3k}$$
$$\text{Ln}\left(\frac{19}{54}\right) = \text{Ln}(e^{3k})$$
$$k \approx -0.34818$$

Por tanto:

$$T(t) = 54e^{-0.34818t} + 21$$

La representación gráfica de la función solución viene dada por:



Ya que tenemos la temperatura del objeto en función del tiempo, respondemos la pregunta al respecto del tiempo que le tomará al producto enfriarse hasta la temperatura ambiente.

Al no tener una información extra para responder por el tiempo determinado para que el producto esté a temperatura ambiente, partiendo de la ecuación $T(t) = 54e^{-0.34818t} + 21$, resolvemos para t :

$$t = \frac{\text{Ln}\left(\frac{T(t)-21}{54}\right)}{-0.34818}$$

Observamos que la ecuación no tiene una solución finita para $T(t) = 21$, así que se hará una interpretación de la siguiente tabla, para llegar a una aproximación del tiempo requerido.

T(t) (°C)	t(mín)
25	7.48
24	8.31
23	9.47
22	11.46
21.5	13.45
21.1	18.07

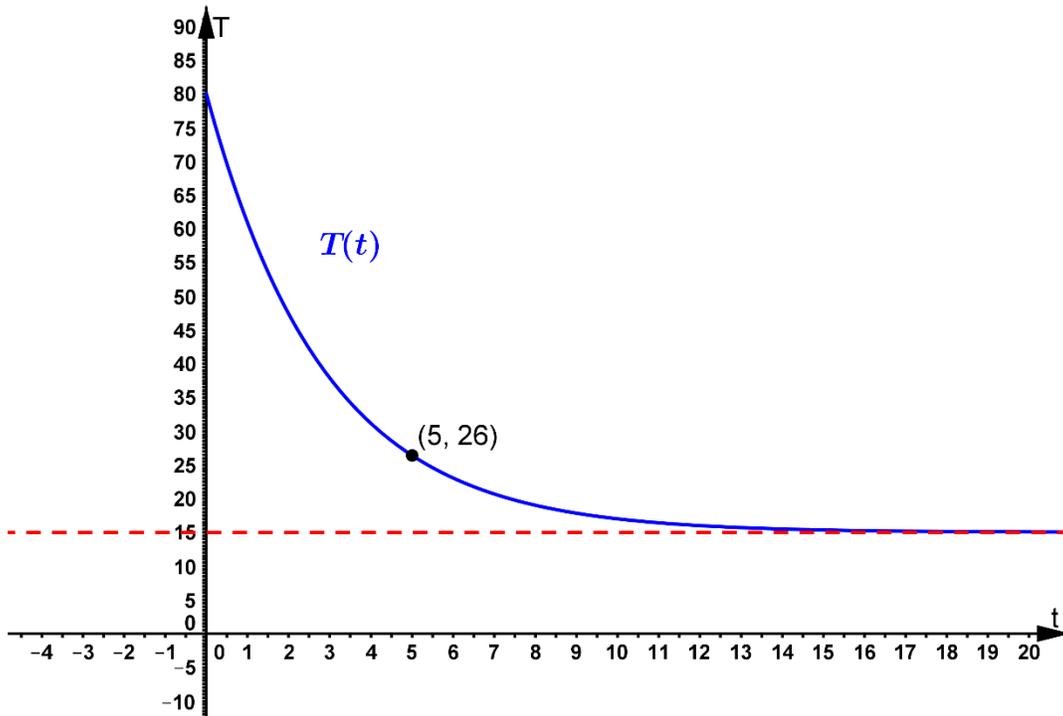
Por tanto, podemos decir que después de haber salido del horno, la harina de yuca estará a temperatura ambiente, aproximadamente 18 minutos después.

■ Fin del Ejemplo 5.

Ejemplo 6: Durante el proceso de pasteurización, la leche se enfría de acuerdo con la ley de enfriamiento/calentamiento de Newton. Utilice los datos de la gráfica para estimar las constantes T_m , T_0 y k en un modelo que tiene la forma de un problema con valores iniciales de primer orden:

$$\frac{dT}{dt} = k[T(t) - T_m]; \quad T(0) = T_0$$

Por último, exprese la función que da solución a la E.D dada.



De la gráfica se puede deducir que $T_0 = 80^\circ\text{C}$, $T_m = 15^\circ\text{C}$ y $T(5) = 26$

Esto es:

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - 15) \quad (1)$$

Resolvemos (1) por el método de separación de variables, con lo que se obtiene (Verifique):

$$T(t) = ce^{kt} + 15$$

Determinamos c , considerando la condición inicial $T(0) = 80$:

$$\begin{aligned} T(0) &= ce^{k(0)} + 15 \\ 80 &= c + 15 \\ c &= 65 \end{aligned}$$

De ahí que:

$$T(t) = 65e^{kt} + 15$$

Determinamos k , considerando la condición $T(5) = 26$:

$$T(5) = 65e^{k(5)} + 15$$

$$26 = 65e^{5k} + 15$$

$$11 = 65e^{5k}$$

$$\frac{11}{65} = e^{5k}$$

$$\ln\left(\frac{11}{65}\right) = \ln(e^{5k})$$

$$k \approx -0.3553$$

Por tanto, la función que da solución, a la E.D dada es:

$$T(t) = 65e^{-0.3553t} + 15$$

■ Fin del Ejemplo 6.

3.1.4. Mezclas

Una solución es una mezcla de un soluto (que puede ser sólido, líquido o gaseoso), en un solvente que puede ser líquido o gaseoso.

Una salmuera (solución de sal en agua), entra a un tanque con una velocidad V_E galones de salmuera/minuto y con una concentración C_E libras de sal por galón de salmuera. Inicialmente el tanque tiene Q galones de salmuera con P libras de sal disuelta. La mezcla bien homogenizada abandona el tanque a una velocidad V_S galones de salmuera/minuto, que contiene una concentración C_S de la sustancia.

Sea $x(t)$ las libras de sal en el instante t .

La razón con la que cambia x , está dada por:

$\frac{dx}{dt}$	=	$R_E - R_S$	R_E : Razón de entrada. R_S : Razón de salida. x : Libras de sal. $Q + (V_E - V_S)t$: Galones de salmuera en el instante t .
		$C_S = \frac{x}{Q + (V_E - V_S)t}$	
$\frac{dx}{dt}$	=	$V_E C_E - V_S C_S$	

$$\frac{dx}{dt} = V_E C_E - V_s \left[\frac{x}{Q + (V_E - V_s)t} \right] \quad (1)$$

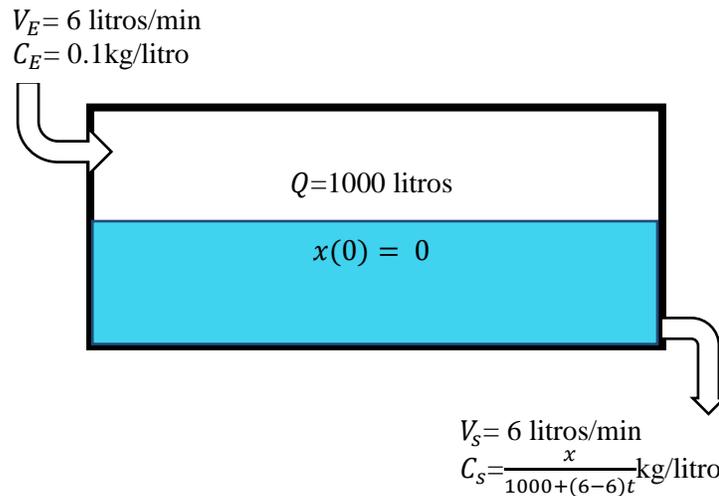
Ejemplo 7: En un tanque de 1000 litros de agua, se vierte una solución salina a una velocidad de 6 litros/min. La solución dentro del tanque se mantiene agitada y sale del tanque a una velocidad de 6 litros/min. La concentración de sal en la solución que entra al tanque es de 0.1 kg/litro.

Determinar el momento en el que la concentración de sal en el tanque llegará a 0.05kg/litro.

Solución:

Sean

- V_E : Velocidad de entrada.
- C_E : Concentración de entrada.
- V_s : Velocidad de salida.
- C_s : Concentración de salida.
- Q : Cantidad de agua.



Dada la E.D (1):

$$\frac{dx}{dt} = V_E C_E - V_s \left[\frac{x}{Q + (V_E - V_s)t} \right]$$

Reemplazando, se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = (6)(0.1) - (6) \left[\frac{x}{1000 + (6-6)t} \right]; \quad x(0) = 0$$

El problema de valores iniciales es:

$$\frac{dx}{dt} = 0.6 - \frac{3x}{500}; \quad x(0) = 0$$

De donde:

$$\frac{dx}{dt} = 0.6 - \frac{3x}{500} \quad (1)$$

Resolvemos la ecuación (1) por el método del factor integrante. Para este caso el factor integrante sería:

$$e^{\int \frac{3}{500} dt} = e^{\frac{3}{500}t}$$

Con lo que se obtiene (Verificarlo):

$$x(t) = 100 \left(1 - e^{\frac{-3}{500}t} \right)$$

Ya tenemos x en función de t , así que respondemos la pregunta.

Para determinar la concentración de sal en el tanque en un instante t (C_s), recordemos que:

$$C_s = \frac{x(t)}{1000}$$

Reemplazando $x(t)$:

$$C_s = \frac{100 \left(1 - e^{\frac{-3}{500}t} \right)}{1000}$$

$$C_s = 0.1 \left(1 - e^{\frac{-3}{500}t} \right)$$

Determinamos entonces, el tiempo tal que C_s sea 0.05 kg/litro:

$$\begin{aligned} 0.1 \left(1 - e^{\frac{-3}{500}t} \right) &= 0.05 \\ 1 - e^{\frac{-3}{500}t} &= 0.5 \end{aligned}$$

Con lo que se obtiene (Verificarlo):

$$t \approx 115.5$$

Por tanto, el tiempo que tarda el tanque en tener una concentración de sal de 0.05 kg/litro es aproximadamente 115.5 minutos.

■ Fin del Ejemplo 7.

Ejercicio 1: Determine la ecuación que representa la concentración de sal en el instante t , del mismo caso del ejemplo anterior, salvo que la velocidad de salida de la solución es $V_s = 5$ litros/min.

3.2. Modelos no lineales

En una población demasiado grande en relación a su hábitat, aparecen fuerzas que contribuyen al freno de su crecimiento por competencia entre sus individuos, por ejemplo. Para evaluar este tipo de casos, es preciso trabajar sobre el marco de las ecuaciones diferenciales no lineales.

A continuación, se presenta un modelo logístico de crecimiento poblacional que refleja la competencia de los miembros de la población por un espacio vital limitado y sus recursos.

3.2.1. El modelo logístico

La hipótesis de que la tasa con que crece (o decrece) una población sólo depende del número presente P y no de mecanismos dependientes del tiempo, tales como los fenómenos estacionales, se puede enunciar como:

$$\frac{dP}{dt} = Pf(P)$$

Supongamos que un medio ambiente es capaz de sostener, como máximo, una cantidad K de individuos en una población. La cantidad K se llama *capacidad de sustento* del ambiente. Así para la función f en la ecuación anterior se tiene que $f(K) = 0$.

Una de las ecuaciones que representa un modelo para predecir la población humana P es:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP); \quad a > 0 \text{ y } b > 0$$

Donde $a = f(0)$ y $b = \frac{a}{K}$.

Esta ecuación se denomina *ecuación logística* y su solución se denomina *función logística*. La gráfica de una función logística es entonces la *curva logística*.

Se ha comprobado que las curvas logísticas predicen con precisión el crecimiento de ciertos tipos de bacterias, protozoarios, pulgas de agua (*Dafnia*) y moscas de la fruta (*Drosófila*) en un espacio limitado.

Ejemplo 8: Suponga que un estudiante es portador del virus de la gripe y regresa a su aislado campus de 1000 estudiantes. Si se supone que la razón con que se propaga el virus es proporcional no solo a la cantidad X de estudiantes infectados sino también a la cantidad de estudiantes no infectados, determine la cantidad de estudiantes infectados después de 6 días si además se observa que después de cuatro días han resultado infectados 50 estudiantes.

Solución:

Sean

X : Cantidad de estudiantes infectados.

1000: Población total.

$1000 - X$: Cantidad de estudiantes no infectados.

k : Constante de proporcionalidad.

La ecuación para el modelo sería:

$$\frac{dX}{dt} = kX(1000 - x); \quad X(0) = 1; \quad X(4) = 50$$

$$\frac{dX}{dt} = 1000kX - kX^2$$

Es decir:

$$\frac{dX}{dt} - 1000kX = -kX^2 \quad (1)$$



Note que la ecuación (1) es de la forma de Bernoulli con $n = 2$. Así que dada la sustitución:

$u = X^{-1},$ <p>es decir: $X = u^{-1}$</p> <p>de ahí que: $\frac{dX}{dt} = \frac{-1}{u^2} \frac{du}{dt}$</p>

Reemplazando en (1) se tiene:

$$\frac{-1}{u^2} \frac{du}{dt} - 1000ku^{-1} = -k(u^{-1})^2$$

Multiplicando por $-u^2$:

$$\frac{du}{dt} + 1000ku = k \quad (2)$$

Resolvemos la ecuación diferencial lineal (2) por el método del factor integrante

Para este caso el factor integrante sería:

$$e^{\int(1000k)dt} = e^{1000kt}$$

Multiplicando (2) por el factor integrante, se tiene:

$$e^{1000kt} \left[\frac{du}{dt} + 1000ku \right] = e^{1000kt} [k]$$

Con lo que se obtiene (Verificarlo):

$$u(t) = \frac{1}{1000} + ce^{-1000kt}$$

Regresando a la variable X :

$$X(t) = \frac{1000}{1 + 1000ce^{-1000kt}}$$

Determinamos c , considerando la condición inicial $X(0) = 1$:

Con lo que se obtiene $c = 0.999$.

Luego, tendríamos:

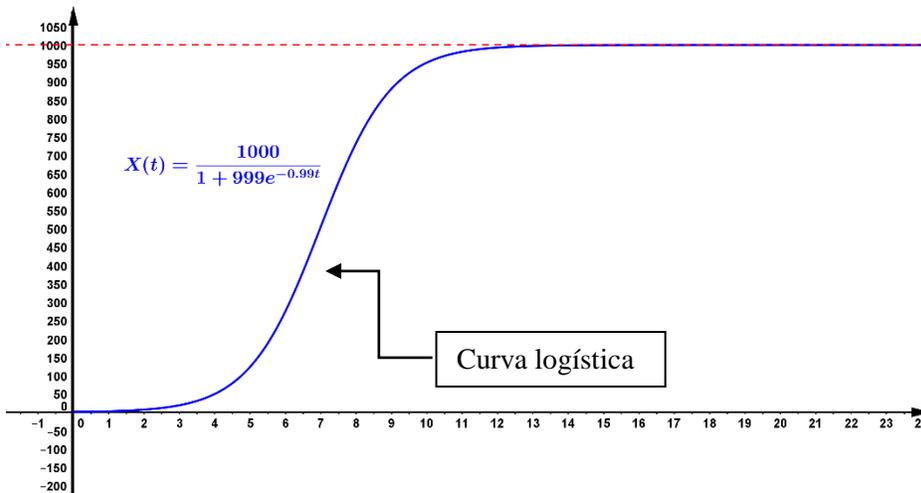
$$X(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000kt}}$$

Determinamos k , considerando la condición $X(4) = 50$:

De ahí que (Verifíquelo): $k \approx 0.00099$

Por tanto,

$$X(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.99t}}$$

Ya tenemos X en función de t , así que respondemos la pregunta. Para saber el número de estudiantes infectados después de 6 días, evaluamos en la *función logística*, así que:

$$X(6) = 276$$

Luego, después de 6 días el número de estudiantes infectados es aproximadamente de 276.

Ejercicio 2: El ritmo al que se propaga un rumor en un país es conjuntamente proporcional a la cantidad de personas que se han enterado del rumor y al número de personas que no se han enterado del rumor.

- Plantee la ecuación diferencial que describe el modelo.
- Encuentre la solución general obtenida de la ecuación diferencial planteada.

Ejercicio 3: La razón a la que las personas oyen hablar a cerca de un nuevo aumento de los impuestos prediales es proporcional al número de personas en el país que no ha oído hablar al respecto.

- Plantee la ecuación diferencial que describe el modelo.
- Encuentre la solución general obtenida de la ecuación diferencial planteada.

Ejercicio 4: Suponga que le precio $p(t)$ de determinado artículo varía de modo que su razón de cambio con respecto al tiempo es proporcional a la escasez $D - S$ donde $D = 8 - 2p$ y $S = 2 + p$ son las funciones de demanda y oferta respectivamente.

- Si el precio es \$5 cuando $t = 0$ y \$3 cuando $t = 2$, halle $p(t)$.
- Determine lo que ocurre con $p(t)$ a largo plazo.
- Haciendo uso de un software, haga una representación gráfica de $p(t)$.

Modificaciones de la ecuación logística

Hay muchas variaciones de la ecuación logística. Por ejemplo, las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) - h \qquad \frac{dP}{dt} = P(a - bP) + h$$

podrían servir, a su vez, como modelos para la población de una pesquería donde el pez se pesca o se reabastece con una razón h . Cuando $h > 0$ es una constante, las ED en las ecuaciones se analizan fácilmente cualitativamente o se resuelven analíticamente por separación de variables.

Las ecuaciones también podrían servir como modelos de poblaciones humanas que decrecen por emigración o que crecen por inmigración, respectivamente.

La razón h en dichas ecuaciones podría ser función del tiempo t o depender de la población; por ejemplo, se podría pescar periódicamente o con una razón proporcional a la población P al tiempo t .

En el último caso, el modelo sería: $\frac{dP}{dt} = P(a - bP) - cP, c > 0$.

La población humana de una comunidad podría cambiar debido a la inmigración de manera tal que la contribución debida a la inmigración es grande cuando la población P de la comunidad era pequeña pero pequeña cuando P es grande; entonces un modelo razonable para la población de la comunidad sería:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) + ce^{-kP}; \quad c > 0, k > 0.$$

Otra ecuación $\frac{dP}{dt} = P(a - b \ln(P))$ es una modificación de la ecuación logística conocida como la **ecuación diferencial de Gompertz**. Esta ED algunas veces se usa como un modelo en el estudio del crecimiento o decrecimiento de poblaciones, el crecimiento de tumores sólidos y cierta clase de predicciones actuariales.

Ejercicio 5:

Si se pesca un número constante h de peces de una pesquería por unidad de tiempo, entonces un modelo para la población $P(t)$ de una pesquería al tiempo t está dado por

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) - h, \quad P(0) = P_0.$$

Donde a, b, h y P_0 son constantes positivas. Suponga que $a = 5, b = 1$ y $h = 4$.

- Resuelva el PVI. Represente gráficamente la curva logística.
- Determinar si la población de la pesquería desaparecerá en un tiempo finito. De ser así, determine ese tiempo.