Taller

Capítulo 3

Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Esboce las gráficas de cada una de las funciones que modelan cada problema.

1. Un cultivo de bacterias crece a un ritmo proporcional a la cantidad de bacterias existentes. Entre las 6 p.m. y las 7 p.m. la población se triplica. ¿A qué hora será cien veces la que había a las 6 p.m.?

2. La tasa de crecimiento de una población de moscas de la fruta en un instante dado es proporcional al tamaño de la población en dicho momento. Si al inicialmente el experimento hay 108 moscas y 180 moscas después del segundo día, determine el tiempo necesario para que el número de moscas se duplique.

3. Se supone que la población de elefantes decrece a una tasa de 8% anual, la tasa de crecimiento k es ahora negativa.

   La ecuación que rige la población x de elefantes es:

$$\frac{dx}{dt} = -0.08x$$

   ¿Cuánto tiempo tardaría esta población en reducirse a la tercera parte?

4. La población de Cali era de 200 mil habitantes en 1950 (t = 0) y de 1 millón en 1985 (t = 35). Si en cada instante crece con rapidez proporcional a la población existente en ese instante, ¿En qué año la población de Cali excederá los 5 millones de habitantes?

5. En un cultivo de bacterias, se estimó que inicialmente había 150 bacterias y 200 después de una hora. Suponiendo una rapidez de crecimiento proporcional a la cantidad de bacterias presente, determinar:
   a. La cantidad de bacterias después de t horas.
   b. La cantidad de bacterias después de 2 horas.
   c. El tiempo que debe transcurrir para que la población se triplique.

6. Cierta población de bacterias tiene una rapidez de cambio proporcional a sí misma. Si en una 1 h tuvo un crecimiento del 50 por ciento:
   a. ¿Cuál es la población después de t horas?
   b. ¿En cuánto tiempo se duplicará la población?
   c. ¿Cuánto habrá aumentado la población en 10 h?

7. Si la población de un país se duplica en 50 años ¿En cuántos años será el triple suponiendo que la velocidad de aumento sea proporcional al número de habitantes?

8. Se tienen 700 gr de una sustancia radioactiva cuya vida media es de 8 segundos ¿cuánto quedará después de 40 segundos?

9. Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas su masa disminuyó en un 3%. Si en un instante cualquiera la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia presente, determinar la cantidad que queda después de 24 horas.

10. Una sustancia radiactiva se desintegra a una velocidad que es proporcional a la cantidad presente. La vida media de una sustancia radiactiva es el tiempo requerido para que determinada cantidad de material se reduzca a la mitad. Si de 200 gramos de determinada sustancia radiactiva quedan 50 gramos al cabo de 100 años. ¿Cuántos gramos de sustancia radiactiva quedarán transcurridos otros cien años?

11. Según la ley de Newton de enfriamiento, la velocidad a que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia de temperatura de la sustancia a la del aire. Si la temperatura del aire es de 30 grados y la sustancia se enfría de 100 grados a 70 grados en 15 minutos. ¿Cuándo será 40 grados la temperatura de la sustancia?

12. Un termómetro que está inicialmente en el interior de una habitación se lleva al exterior donde la temperatura es aproximadamente constante a 15ºC. Después de un minuto marca 30ºC y después de 10 minutos marca 20ºC.
    ¿Cuál era la temperatura de la habitación? Respuesta: 32ºC.

13. Una masa de metal se extrae de un horno a 1000ºC y se pone a enfriar en un lugar cuya temperatura se mantiene aproximadamente constante a 30ºC. Después de 10 horas su temperatura desciende a 200ºC.
    ¿Cuánto tardará en llegar a 31ºC? Respuesta: Para t = 39,49 horas la temperatura es de 31ºC.

14. Si la temperatura de una taza de café es de 95ºC recién servida, y al minuto se enfrió a 88ºC en un cuarto que está a 20ºC, ¿cuánto tiempo debe de transcurrir para que se enfríe hasta los 65ºC?

15. Un cuerpo se enfría en el aire a una temperatura constante de 20ºC. Si la temperatura del cuerpo cambia de 100ºC a 60ºC en 20 minutos, determinar cuánto tiempo debe transcurrir para que la temperatura del cuerpo sea 30ºC.

16. Un termómetro se saca de una habitación donde la temperatura es de 70ºF, al exterior donde la temperatura es de 10ºF. Después de medio minuto, el termómetro marca 50ºF.
    a. ¿Cuánto marcará al cabo de un minuto?,
    b. ¿Cuánto tardará en alcanzar los 15ºF?

17. A un tanque que contenía 400 litros de agua pura se bombea una solución de aguasal que contiene 0.05 kg de sal por litro, a una razón de 8 litros por minuto. La mezcla homogeneizada sale con la misma rapidez. Determine la cantidad de sal en el tanque al cabo de los primeros 50 minutos.

18. En un tanque que contiene 1 000 litros de agua, inicialmente se disuelven 5 kg de sal. Luego se bombea salmuera al tanque a razón de 20 litros/min y la solución uniformemente mezclada se bombea hacia afuera del tanque a la misma razón. Considerando que la concentración de la solución que entra es de 0.01 kg/litro, determinar:
    a. La cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier instante t.
    b. La cantidad de sal en el tanque después de 30 min.
    c. La cantidad de sal en el tanque después de mucho tiempo.
    d. El tiempo que debe transcurrir para que haya 8 kg de sal en el tanque.

19. En una población de 5000 habitantes, diez de ellos tienen una enfermedad contagiosa. La velocidad a la que se propaga la enfermedad es proporcional al producto de personas contagiadas por las no contagiadas, con una constante de proporcionalidad de 0,2. Describir y resolver la ecuación diferencial correspondiente.