Universidad del Cauca

ISO 9001:2015 SC- CER 450832

IQNet: CO- SC-CER450832

Una Acreditación con Rostro Humano

Hacia una Universidad comprometida con la paz territorial

LA DERIVADA

TEORÍA

ASTRID ALVAREZ CASTRO
WWW.MATHSPACE.JIMDO.COM

INTRODUCCIÓN

Universidad del Cauca

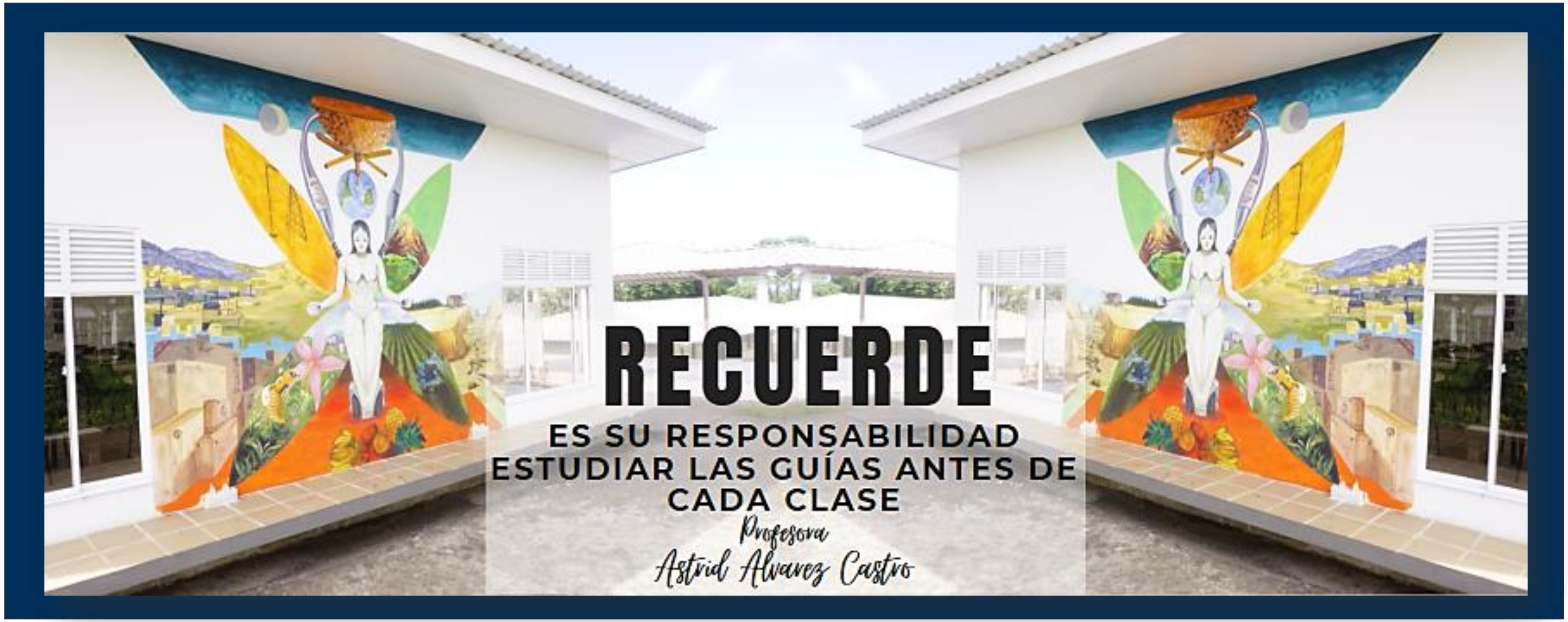
Los contenidos del curso se desarrollarán con el apoyo de los contenidos de *Khan Academy*, las guías de clase y talleres propuestos estarán en www.mathspace.jimdo.com

Usted debe ver los videos de este documento previamente a las reuniones programadas, en las que se discutirán los contenidos y ejercicios propuestos.

De igual manera usted puede estudiar directamente todos los videos en la página oficial de Khan Academy en español en el siguiente enlace: es.khanacademy.org/math/differential-calculus/

INTRODUCCIÓN

Universidad del Cauca



Facultad de Ciencias Agrarias-Unicauca. Foto: Astrid Álvarez C.

PRELIMINARES

¿POR QUÉ ESTUDIAMOS CÁLCULO DIFERENCIAL?

RECTA SECANTE
La pendiente de una recta secante a una curva

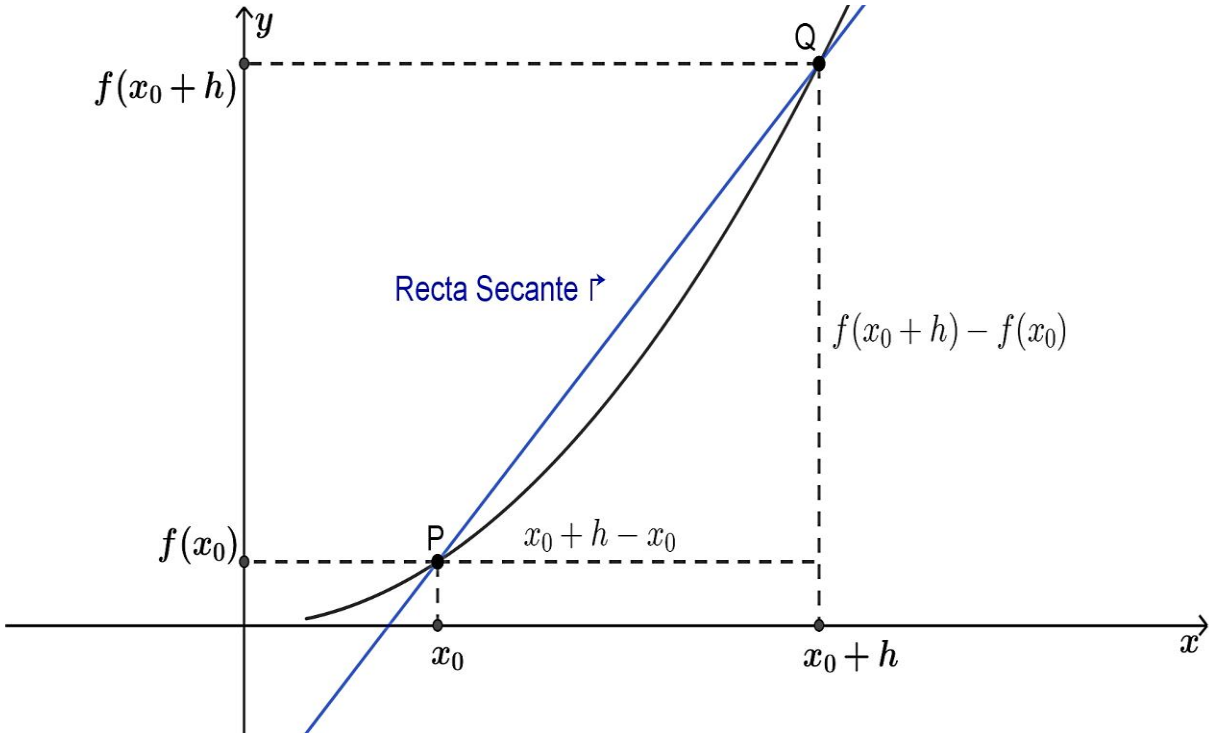
Ejemplo 1.
Recta secante con diferencia arbitraria

Ejemplo 2.
Recta secante con punto arbitrario

RECTAS SECANTES Y
RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO

Universidad del Cauca

Sea una función f que pasa por los puntos P y Q de coordenadas $P(x_o, f(x_o))$ y $Q(x_o + h, f(x_o + h))$.



La pendiente de la Recta Secante m_{sec} que pasa por los puntos P y Q está dada por la expresión:

$$m_{sec} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

En Cálculo la expresión anterior también es conocida como la ***Razón de Cambio Promedio***.

RECTA TANGENTE Y
RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA

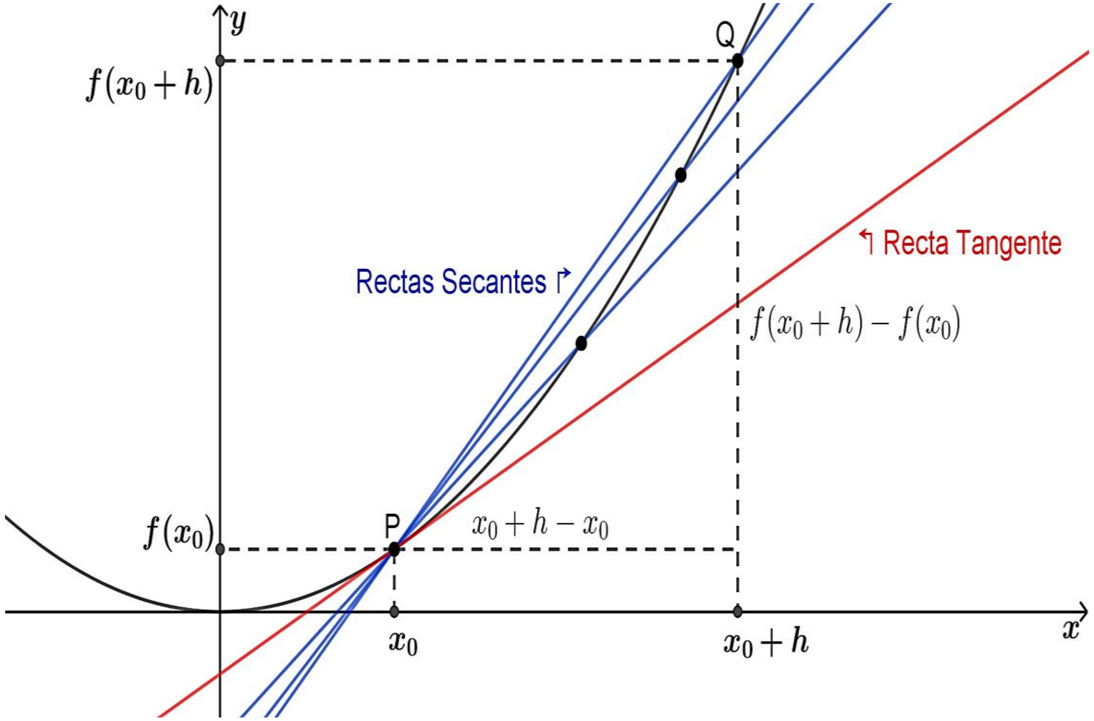
Cuando Q se acerca a P (*h→0)*, las *Rectas Secantes* se aproximan a la *Recta Tangente* en el punto P.

La pendiente de la recta tangente m_t que pasa por el punto P está dada por la expresión:

$$m_t = \lim_{h \to o} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Siempre que el límite exista y f esté definida en un intervalo abierto que contiene a x_0.

En Cálculo la expresión anterior también es conocida como la ***Razón de Cambio Instantánea***.



LA DEFINICIÓN FORMAL DE LA DERIVADA COMO UN LÍMITE

Universidad del Cauca

La Derivada como concepto

La expresión $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se denomina también ***Cociente Diferencial*** de $f(x)$.

Definición: La derivada de una función $\boldsymbol{f(x)}$ respecto de $\boldsymbol{x}$ es la función $\boldsymbol{f'(x)}$ (se lee: $\boldsymbol{f}$ prima de $\boldsymbol{x}$) y está dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

El proceso de calcular la derivada se denomina ***derivación.***

Se dice que $f(x)$ es derivable en x_0 si existe $f'(x_0)$, es decir si el límite del *Cociente Diferencial* existe cuando $x = x_0$.

LA DEFINICIÓN FORMAL DE LA DERIVADA COMO UN LÍMITE

Universidad del Cauca

Ejercicio 1: Use la definición de derivada en los siguientes ejercicios:

a. Sea $f(x) = x^2$, hallar $f'(x)$.

b. Sea $f(x) = sen(x)$, hallar $f'(x)$.

Solución:

a. $\boldsymbol{f(x) = x^2}$

$$\boldsymbol{f(x) = x^2}$$
$$\boldsymbol{f(x+h) = (x+h)^2}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to o} (2x+h)$$

$$f'(x) = 2x$$

LA DEFINICIÓN FORMAL DE LA DERIVADA COMO UN LÍMITE

Universidad del Cauca

Ejercicio 2. Calcule la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ y luego utilícela para:

a. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $\boldsymbol{f(x)} = \sqrt{x}$ en $x = 4$.

b. Hallar la razón de cambio instantánea cuando $x = 1$

NOTACIÓN DE LA DERIVADA

Universidad del Cauca

Sea la función $\boldsymbol{y = f(x)}$

$\frac{dy}{dx}$ **Se lee:** Derivada de y con respecto a x.

$\left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}$ **Se lee:** Derivada de $f(x)$ con respecto a x, cuando x es igual a a.

Notación	**Derivada**		**Derivada de $\boldsymbol{f(x)}$ cuando $\boldsymbol{x = a}$**
Notación de Lagrange:	y'	$f'(x)$	$f'(a)$
Notación de Leibniz:	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d}{dx}f(x)$	$\left.\frac{d}{dx}f(x)\right\|_{x=a}$
Notación de Cauchy:	Dy	$D_x f(x)$	$\left.Dy\right\|_{x=a}$
Notación de Newton:	$\dot{y}$	$\dot{f}(x)$	$\dot{f}(a)$

DERIVADAS UNILATERALES

Universidad del Cauca

Derivada por la derecha: Si f está definida en x_0, la derivada por la derecha de x_0 se define como:

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Derivada por la izquierda: Si f está definida enx_0, la derivada por la izquierda de x_0 se define como:

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(Siempre que los límites existan).

Una función definida en un intervalo abierto que contiene a x_0, es diferenciable en x_0 siempre que $f'_{+}(x_0)$ y $f'_{-}(x_0)$ existan y sean iguales.

TEOREMA.
DIFERENCIABILIDAD Y CONTINUIDAD.

Si f es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.

Ejemplo 3:

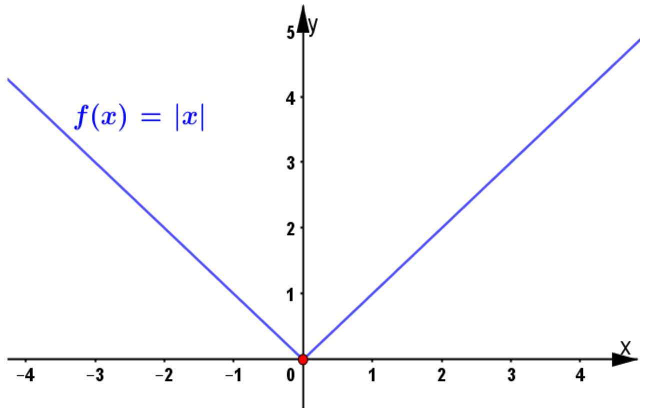
FUNCIONES NO DERIVABLES EN UN PUNTO

Universidad del Cauca

Ejemplo 4: Determine si $\boldsymbol{f(x)} = |x|$ es continua y/o diferenciable en el punto de coordenadas *(0,0)*.

Solución:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



Continuidad

- $\lim_{x \to 0} |x|$ existe ya que, los límites unilaterales existen y son iguales:

$$\lim_{x \to 0-} |x| = \lim_{x \to 0-} -x = 0$$
$$\lim_{x \to 0+} |x| = \lim_{x \to 0+} x = 0$$

- $f(0)$ existe:

$$f(0) = |0| = 0$$

- $\lim_{x \to 0} |x| = f(0)$.

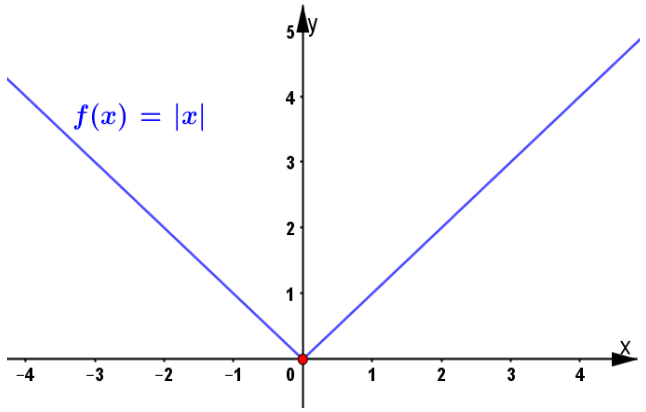
Luego, $\boldsymbol{f(x)} = |x|$ es continua en el punto de coordenadas $(0,0)$, esto es cuando $x = 0$.

FUNCIONES NO DERIVABLES EN UN PUNTO

Ejemplo 4: Determine si $\boldsymbol{f(x)} = |x|$ es continua y/o diferenciable en el punto de coordenadas *(0,0)*.

Solución:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



Diferenciabilidad

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$
$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$
$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h| - |0|}{h}$$
$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h}$$
$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h}$$
$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} -1$$
$$f'_-(0) = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$
$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$
$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h| - |0|}{h}$$
$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h}$$
$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h}$$
$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} 1$$
$$f'_+(0) = 1$$

Luego, $\boldsymbol{f(x)} = |x|$ no es diferenciable en el punto de coordenadas $(0{,}0)$, esto es cuando $x = 0$.

ÁLGEBRA Y TABLA DE DERIVADAS

El documento que corresponde a este tema, puede ser descargado como un único pdf, denominado TABLA DE DERIVADAS en el siguiente enlace:

Este documento se debe usar en todas las clases
de este curso y el siguiente (Cálculo 2).
Llévelo siempre con usted, ya sea impreso o digital.

ÁLGEBRA DE DERIVADAS

$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$
$\frac{d}{dx}kf(x) = k\frac{d}{dx}f(x); \qquad k: Constante$
$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right) + \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)g(x)$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) - f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)}{[g(x)]^2}; \quad g(x) \neq 0$
$\frac{d}{dx}\left(f(x)^{g(x)}\right) = f(x)^{g(x)}\left[\frac{g(x)}{f(x)}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) + Ln(f(x))\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)\right]$

Universidad del Cauca

Hacia una Universidad comprometida con la paz territorial

TABLA DE DERIVADAS

Universidad del Cauca

TABLA DE DERIVADAS			
Nº	FUNCIÓN	DERIVADA	DERIVADA COMPUESTA
1	$y = k;$ $k: Constante$	$\frac{dk}{dx} = 0$	
2	$y = x$	$\frac{dx}{dx} = 1$	
3	$y = x^n$	$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1}\frac{d}{dx}f(x)$
4	$y = log_a(x)$	$\frac{d}{dx}log_a(x) = \frac{1}{x}log_a(e)\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}log_a(f(x)) = \frac{1}{f(x)}log_a(e)\frac{d}{dx}f(x)$
5	$y = Ln(x)$	$\frac{d}{dx}Ln(x) = \frac{1}{x}\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}Ln(f(x)) = \frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)$
6	$y = a^x$	$\frac{d}{dx}a^x = a^x Ln(a)\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}a^{f(x)} = a^{f(x)}Ln(a)\frac{d}{dx}f(x)$
7	$y = e^x$	$\frac{d}{dx}e^x = e^x\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}e^{f(x)} = e^{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)$
8	$y = sen(x)$	$\frac{d}{dx}sen(x) = \cos(x)\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}sen(f(x)) = \cos(f(x))\frac{d}{dx}f(x)$
9	$y = cos(x)$	$\frac{d}{dx}cos(x) = -sen(x)\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}cos(f(x)) = -sen(f(x))\frac{d}{dx}f(x)$
10	$y = tan(x)$	$\frac{d}{dx}tan(x) = \frac{1}{cos^2 x}\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}tan(f(x)) = \frac{1}{cos^2(f(x))}\frac{d}{dx}f(x)$
11	$y = cot(x)$	$\frac{d}{dx}cot(x) = -csc^2(x)\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}cot(f(x)) = -csc^2(f(x))\frac{d}{dx}f(x)$
12	$y = sec(x)$	$\frac{d}{dx}sec(x) = \sec(x)\tan(x)\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}sec(f(x)) = \sec(f(x))\tan(f(x))\frac{d}{dx}f(x)$
13	$y = csc(x)$	$\frac{d}{dx}csc(x) = -csc(x)cot(x)\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}csc(f(x)) = -csc(f(x))cot(f(x))\frac{d}{dx}f(x)$
14	$y = arcsen(x)$	$\frac{d}{dx}arcsen(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}arcsen(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\frac{d}{dx}f(x)$
15	$y = arccos(x)$	$\frac{d}{dx}arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}arccos(f(x)) = \frac{-1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\frac{d}{dx}f(x)$
16	$y = arctan(x)$	$\frac{d}{dx}arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}arctan(f(x)) = \frac{1}{1+(f(x))^2}\frac{d}{dx}f(x)$
17	$y = senh(x)$	$\frac{d}{dx}senh(x) = cosh(x)\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}senh(f(x)) = cosh(f(x))\frac{d}{dx}f(x)$
18	$y = cosh(x)$	$\frac{d}{dx}cosh(x) = senh(x)\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}cosh(f(x)) = senh(f(x))\frac{d}{dx}f(x)$
19	$y = tanh(x)$	$\frac{d}{dx}tanh(x) = \frac{1}{cosh^2(x)}\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}tanh(f(x)) = \frac{1}{cosh^2(f(x))}\frac{d}{dx}f(x)$
20	$y = arcsenh(x)$	$\frac{d}{dx}arcsenh(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}arcsenh(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{(f(x))^2+1}}\frac{d}{dx}f(x)$
21	$y = arccosh(x)$	$\frac{d}{dx}arccosh(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}arccosh(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{(f(x))^2-1}}\frac{d}{dx}f(x)$
22	$y = arctanh(x)$	$\frac{d}{dx}arctanh(x) = \frac{1}{1-x^2}\frac{dx}{dx}$	$\frac{d}{dx}arctanh(f(x)) = \frac{1}{1-(f(x))^2}\frac{d}{dx}f(x)$

Ejemplos de Derivadas

Ejemplo 5.

$y = 4x^5 - ex^2 + \pi$

Ejemplo 6.

$y = (7x^3 - ex)^2$

Ejemplo 7.

$y = Tan^2(\sqrt{x})$

Ejemplo 5.

$y = 4x^5 - ex^2 + \pi$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4x^5 - ex^2 + \pi)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4x^5) - \frac{d}{dx}(ex^2) + \frac{d}{dx}(\pi)$$

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{d}{dx}(x^5) - e\frac{d}{dx}(x^2) + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 4\left(5x^4\frac{dx}{dx}\right) - e\frac{d}{dx}\left(2x^1\frac{dx}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 20x^4 - 2ex$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x(10x^3 - e)$$

Se consideran:

- $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$
- $\frac{d}{dx}kf(x) = k\frac{d}{dx}f(x);\qquad k: Constante$
- $\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1}\frac{d}{dx}f(x)$

Universidad del Cauca

Ejemplos de Derivadas

Ejemplo 5.

$$y = 4x^5 - ex^2 + \pi$$

Ejemplo 6.

$$y = (7x^3 - ex)^2$$

Ejemplo 7.

$$y = Tan^2(\sqrt{x})$$

Ejemplo 6.

$$y = (7x^3 - \pi x)^2$$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(7x^3 - \pi x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(49x^6 - 14\pi x^4 + \pi^2 x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(49x^6) - \frac{d}{dx}(14\pi x^4) + \frac{d}{dx}(\pi^2 x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 49\frac{d}{dx}(x^6) - 14\pi\frac{d}{dx}(x^4) + \pi^2\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 49\left(6x^5\frac{dx}{dx}\right) - 14\pi\left(4x^3\frac{dx}{dx}\right) + \pi^2\left(2x^1\frac{dx}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 294x^5 - 56\pi x^3 + 2\pi^2 x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x(147x^4 - 28\pi x^2 + \pi^2)$$

Universidad del Cauca

Se consideran:

- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$
- $\frac{d}{dx}kf(x) = k\frac{d}{dx}f(x); \qquad k: Constante$
- $\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1}\frac{d}{dx}f(x)$

Ejemplos de Derivadas

Ejemplo 5.

$$y = 4x^5 - ex^2 + \pi$$

Ejemplo 6.

$$y = (7x^3 - ex)^2$$

Ejemplo 7.

$$y = Tan^2(\sqrt{x})$$

Ejemplo 7.

$$y = Tan^2(\sqrt{x})$$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} Tan^2(\sqrt{x})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (Tan(\sqrt{x}))^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(Tan(\sqrt{x}))^1 \frac{d}{dx} Tan(\sqrt{x})$$

$$\frac{dy}{dx} = 2Tan(\sqrt{x}) \frac{1}{cos^2(\sqrt{x})} \frac{d}{dx} \sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2Tan(\sqrt{x}) \frac{1}{cos^2(\sqrt{x})} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Tan(\sqrt{x})}{\sqrt{x} cos^2(\sqrt{x})}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Tan(\sqrt{x}) sec^2(\sqrt{x}))}{\sqrt{x}}$$

Se consideran:

- $f^2(x) = (f(x))^2$
- $\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} \frac{d}{dx} f(x)$
- $\frac{d}{dx} tan(f(x)) = \frac{1}{cos^2(f(x))} \frac{d}{dx} f(x)$
- $\frac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$

Universidad del Cauca

Ejemplos de Derivadas

Ejemplo 8.

Ejemplo 9.

Ejemplo 10.

Ejemplo 11.

EJERCICIOS EN CLASE

Universidad del Cauca

EJERCICIO 4.

1. $y = 6x^2 - 2x + 1$
2. $y = \sqrt{3}x^{\pi} - ex^{e} + e^{x} + x^{\sqrt{2}}$
3. $z = \sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{x^2+1} - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{10}{x} - x$
4. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
5. $y = \sqrt{(1-x)^2 + \sqrt{x-1}}$
6. $y = \sqrt{x + \sqrt{\frac{1}{x}}}$
7. $t = \log_3 x - \log_4(x-5) + \log_3(x^{10} - 3x)$
8. $w = Ln(x) + Ln(x^2 - x) - \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$
9. $y = Ln(xe^{x}) - Ln\left(\frac{x}{e^{x}}\right) + Ln(x)^5$
10. $z = Ln^9(x) - Ln(x^9) + Ln(x + e^{x})$
11. $y = Ln\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2-1}}$
12. $z = \sqrt{x^2 + 3x + 2} - sen(x^2 - 3x)$
13. $z = (u^3 + 1)^5(u^3 - 2)^8$
14. $y = \sqrt{x}e^{x} + e^{x+3x}$
15. $y = e^{x+1}Ln(x^2 + 1)$
16. $t = e^{x^3+1}sen\big(Ln(x)\big)$
17. $t = (x + 10)Arcsen(x - 3)$
18. $y = (x^2 - 7)Ln\big(Ln(x^2 - 7)\big)$
19. $z = (3t)cos^4(3t^2) - tsen^9(6t)$
20. $y = 100w(w^2 - 3)(Arccos(w - 10))$

EJERCICIOS EN CLASE

EJERCICIO 4.

21. $y = cos(5x) + cos^2(5x) - cos((5x)^2)$
22. $y = \cos(x)Arc\,tan(x) - sec(x+2) + [\csc(10x)]^4$
23. $w = 9^{\frac{x^2+2}{x^3+1}}$
24. $y = \left[\frac{x^3+3x^2+x}{x^2-1}\right]^{10}$
25. $z = \frac{1}{\sqrt{3x^2+x}}$
26. $y = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-1}}$
27. $y = \left(\frac{sen(t)}{\cos(2t)}\right)^3$
28. $z = \frac{1}{4}Ln\left(\frac{x^2}{x^2-4}\right) - \frac{1}{x^2-4}$
29. $w = \frac{tsen^3(\pi t)}{1+t}$
30. $z = \frac{(3t^2-6)^4}{(2-2t^2)^5}$
31. $y = \left(\frac{x^2-4}{x-4}\right)^{1/2}$
32. $y = \frac{\sqrt{w+1}+3}{(w^2+1)^5}$
33. $y = x^x$
34. $y = r^x;$ *r: constante*
35. $y = (\sqrt{\mathrm{x}})^{\cos(x-3)}$
36. $z = (Ln(x+1))^{Arctan(x)}$
37. $w = (x^2+10x)^{csc(x)}$
38. $y = (\sec(x-2))^{Tan(x^2)}$
39. $y = \left(\sqrt{\cot(x+2)}\right)^{x^5}$
40. $y = (xe^x)^{\sqrt[3]{x+1}}$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA (REGLA DE LA CADENA)

Universidad del Cauca

Si $y = f(x)$ es una función derivable de u, y si además $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces $y = f(g(x))$ es una función derivable con

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \frac{d}{dx} f(g(x)) \cdot \frac{d}{dx} g(x)$$

Nota: Todos los ejercicios anteriores, se trabajaron usando la **Regla de la Cadena**. Observe la última columna de la Tabla de Derivadas.

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA (REGLA DE LA CADENA)

Universidad del Cauca

Funciones compuestas

Definición de la Regla de la Cadena y ejemplo
Ejemplo 12.

La regla de la cadena aplicada a una función radical
Ejemplo 13.

Ejemplo de la Regla de la Cadena
Ejemplo 14.

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Universidad del Cauca

Es una técnica que se usa para derivar funciones que no están dada en la forma usual $y = f(x)$ (forma explícita) o donde resulta muy difícil despejar $\boldsymbol{y}$ en función de $\boldsymbol{x}$.

Procedimiento:

1. Derivar ambos lados de la ecuación con respecto a x (variable independiente).
2. Agrupar todos los términos que contengan $\frac{dy}{dx}$ en un lado de la ecuación y agrupar los demás términos en el otro lado.
3. Despejar $\frac{dy}{dx}$.

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo 15.

Derivar implícitamente la función dada:

$$y + y^3 - x = 7$$

$$
\begin{aligned}
y + y^3 - x &= 7 \\
\frac{d}{dx}(y + y^3 - x) &= \frac{d}{dx}(7) \\
\frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(7) \\
\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} - 1 &= 0 \\
\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} &= 1 \\
\frac{dy}{dx}(1 + 3y^2) &= 1 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1 + 3y^2}
\end{aligned}
$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Derivada implícita de $\boldsymbol{y} = \cos(\mathbf{5}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}\boldsymbol{y})$

Encontrando la pendiente de la recta tangente usando derivación implícita

Demostración de que la derivación implícita, y explícita es la misma

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Universidad del Cauca

Ejercicio 5.

Derivar implícitamente la función dada:

$x^3 + 4xy^2 - 27 = y^4$.

Ejercicio 6.
Encontrar la pendiente de la recta tangente de la curva

$x^3 = (y - x^2)^2$ en $(1,2)$.

Ejercicio 7.

Sea $q - p = Ln(q) + Ln(p)$. Encuentre $\frac{dq}{dp}$.

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Universidad del Cauca

Ejercicio 8.

Encontrar la pendiente de la curva

$$x^2 + y^2 = 4$$

En el punto de coordenadas

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Hacer una representación gráfica de la curva y la recta que pasa por la curva y el punto dados.

DERIVADA DE FUNCIONES INVERSAS

Universidad del Cauca

Sea f una función inyectiva, si f es derivable en $f^{-1}(a)$ y esa derivada es distinta de cero, entonces f es derivable en a y se cumple que:

$$(f^{-1}(a))' = \frac{1}{f'[f^{-1}(a)]}$$

Derivada de la función inversa

DERIVADA DE FUNCIONES INVERSAS

Universidad del Cauca

Ejemplo 16. Derivada de logaritmo natural.

$y = Ln(x)$	Sea la función logaritmo natural.
$e^y = x$	Despejando x.
$\frac{d}{dx}e^y = \frac{d}{dx}x$	Derivando con respecto a x.
$e^y\frac{dy}{dx} = 1$	
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$	Despejando $\frac{dy}{dx}$.
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$	Reemplazando $e^y = x$.

Ejercicio 9. Verificar

$$(f^{-1}(a))' = \frac{1}{f'[f^{-1}(a)]}$$

DERIVADA DE FUNCIONES INVERSAS

Universidad del Cauca

Ejemplo 17. Derivada de seno inverso.

Ejemplo 18. Derivada de coseno inverso.

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Universidad del Cauca

Es una técnica usada con frecuencia para simplificar la derivación de $y = f(x)$ cuando $f(x)$ tiene productos, cocientes y/o potencias.

Procedimiento:

1. Tomar logaritmo natural en ambos lados de la ecuación.
2. Simplificar usando las propiedades de los logaritmos.
3. Derivar ambos lados de la ecuación.
4. Despejar y'.
5. Expresar la respuesta solo en términos de x. (la variable independiente).

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Ejemplo 19.

Usar derivación logarítmica para derivar la función dada:

$$y = \frac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}$$

Solución:

$$y = \frac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}$$

$$Ln(y) = Ln\left(\frac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}\right)$$

$$Ln(y) = Ln(2x-5)^3 - Ln(x^2\sqrt[4]{x^2+1})$$

$$Ln(y) = 3Ln(2x-5) - \left(Lnx^2 + Ln\sqrt[4]{x^2+1}\right)$$

$$Ln(y) = 3Ln(2x-5) - \left(2Lnx + \frac{1}{4}Ln(x^2+1)\right)$$

Recuerde:

$$\log(a \cdot b) = loga + logb$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = loga - logb$$

$$loga^b = b \cdot loga$$

Derivando:

$$\frac{d}{dx}Ln(y) = \frac{d}{dx}\left[3Ln(2x-5) - \left(2Lnx + \frac{1}{4}Ln(x^2+1)\right)\right]$$

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Universidad del Cauca

Ejemplo 19.

Usar derivación logarítmica para derivar la función dada:

$$y = \frac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}$$

Solución:
Recuerde:

$$\log(a \cdot b) = loga + logb$$
$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = loga - logb$$
$$loga^b = b \cdot loga$$

$$\frac{d}{dx}Ln(f(x)) = \frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)$$

Derivando:

$$\frac{d}{dx}Ln(y) = \frac{d}{dx}\left[3Ln(2x-5) - \left(2Lnx + \frac{1}{4}Ln(x^2+1)\right)\right]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}3Ln(2x-5) - \frac{d}{dx}2Lnx - \frac{d}{dx}\frac{1}{4}Ln(x^2+1)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 3\frac{d}{dx}Ln(2x-5) - 2\frac{d}{dx}Lnx - \frac{1}{4}\frac{d}{dx}Ln(x^2+1)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{1}{2x-5}\frac{d}{dx}(2x-5)\right) - 2\left(\frac{1}{x}\frac{dx}{dx}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2+1}\frac{d}{dx}(x^2+1)\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{1}{2x-5}(2)\right) - 2\left(\frac{1}{x}(1)\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2+1}(2x)\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{6}{2x-5}\right) - \left(\frac{2}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Universidad del Cauca

Ejemplo 19.

Usar derivación logarítmica para derivar la función dada:

$$y = \frac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}$$

Solución:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{6}{2x-5}\right) - \left(\frac{2}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{6}{2x-5} - \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\right]$$

Reemplazando y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}\left[\frac{6}{2x-5} - \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\right]$$

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Universidad del Cauca

Ejercicio 9.

Cada estudiante debe proponer un ejercicio a desarrollar con esta técnica.

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Notación:

Primera derivada	y'	$f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d}{dx}[f(x)]$
Segunda derivada	y''	$f''(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$
Tercera derivada	y'''	$f'''(x)$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$
Cuarta derivada	$y^{(4)}$	$f^{(4)}(x)$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	$\frac{d^4}{dx^4}[f(x)]$

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Ejemplo 20.
Segunda derivada

Ejemplo 21.
Encontrar implícitamente la segunda derivada

Ejemplo 22.
Encontrar la segunda derivada en un punto dado al usar diferenciación implícita

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Universidad del Cauca

Ejercicio 10.

Sea

$f(x) = ex^9 - 2\pi x^3 + 7x - 12.$

Encontrar todas las derivadas de orden superior de $f(x)$.

Ejercicio 11.

Determinar la razón de cambio de $f'(x)$,
si $f(x) = x^6 Ln(\sqrt{x}) + 4e^x$.