APLICACIONES DE LA DERIVADA

TEORÍA

ASTRID ALVAREZ CASTRO

WWW.MATHSPACE.JIMDO.COM

INTRODUCCIÓN

Los contenidos del curso se desarrollarán con el apoyo de los contenidos de *Khan Academy*, las guías de clase y talleres propuestos estarán en www.mathspace.jimdo.com

Usted debe ver los videos de este documento previamente a las reuniones programadas, en las que se discutirán los contenidos y ejercicios propuestos.

De igual manera usted puede estudiar directamente todos los videos en la página oficial de Khan Academy en español en el siguiente enlace:

https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-diff-contextual-applications-new

INTRODUCCIÓN

Facultad de Ciencias Agrarias-Unicauca. Foto: Astrid Álvarez C.

REGLA DE L'HOPITAL

Teorema:

Si $\lim_{x \to c} f(x) = 0,\ \lim_{x \to c} g(x) = 0\ \ y\ \lim_{x \to c} \frac{f(x)'}{g(x)'}$ existe o es infinito, entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)'}{g(x)'}$$

Nota: Versiones equivalentes a la regla de L´Hopital para límites de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ se obtienen si $x \to c$ se sustituye por $x \to c$ + o $x \to c$ – o $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$

REGLA DE L'HOPITAL

Teorema:

Si $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to c} g(x) = +\infty \ y \ \lim_{x \to c} \frac{f(x)'}{g(x)'}$ existe o es infinito, entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)'}{g(x)'}$$

Nota: Análogamente para límites de la formas indeterminadas: $\frac{-\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}$ y $\frac{-\infty}{-\infty}$

Nota: Versiones equivalentes a la regla de L´Hopital para límites de la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ se obtienen si $x \to c$ se sustituye por $x \to c+$ o $x \to c-$ o $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$

REGLA DE L'HOPITAL

Ejemplo 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=\frac{0}{0}$$

Usando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(sen(x))'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)}{1}$$

$$=\frac{1}{1}$$

$$=1$$

REGLA DE L'HOPITAL

Ejemplo 2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x) - x}{xsen(x)} = \frac{0}{0}$$

Usando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x) - x}{xsen(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(sen(x) - x)'}{(xsen(x))'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{cos(x) - 1}{sen(x) + x(\cos(x))} = \frac{0}{0}$$

Usando la regla de L'Hôpital:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(cos(x) - 1)'}{(sen(x) + x(\cos(x)))'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-sen(x)}{cos(x) + \cos(x) - xsen(x)}$$

$$= 0$$

REGLA DE L'HOPITAL

Ejemplo 3.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 5x}{2x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Usando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 5x}{2x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(3x^2 - 5x)'}{(2x^2 + 1)'}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6x - 5}{4x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Usando la regla de L'Hôpital:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(6x - 5)'}{(4x)'}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6}{4}$$

$$= \frac{3}{2}$$

REGLA DE L'HOPITAL

Ejercicios1. Resolver usando la Regla de L'Hopital.

a. $\lim_{x \to 0} \frac{x\cos(x) - sen(x)}{x^3}$

$b.\ \lim_{x \to 0} \frac{sen(5x)}{sen(2x)}$

$c.\ \lim_{x \to 2} \frac{Tan^2(x-2)}{x^2-4}$

$d.\ \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{3x^2}$

$e.\ \lim_{x \to \infty} \frac{x}{Ln(x)}$

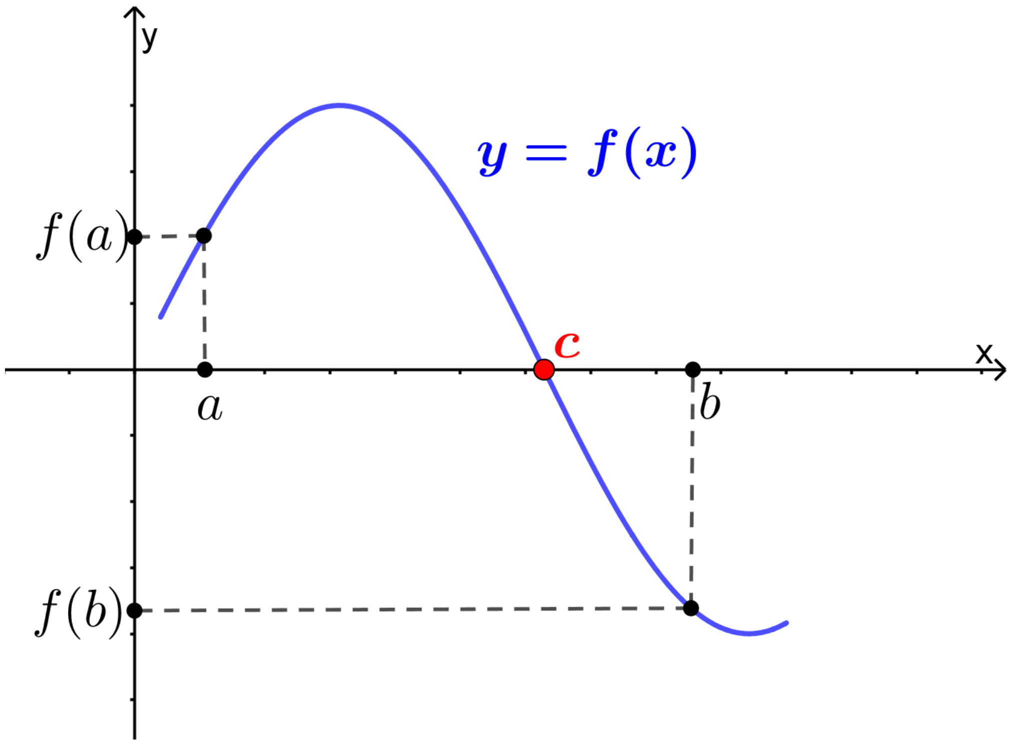
$f.\ \lim_{x \to \infty} \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

TEOREMA DE BOLZANO

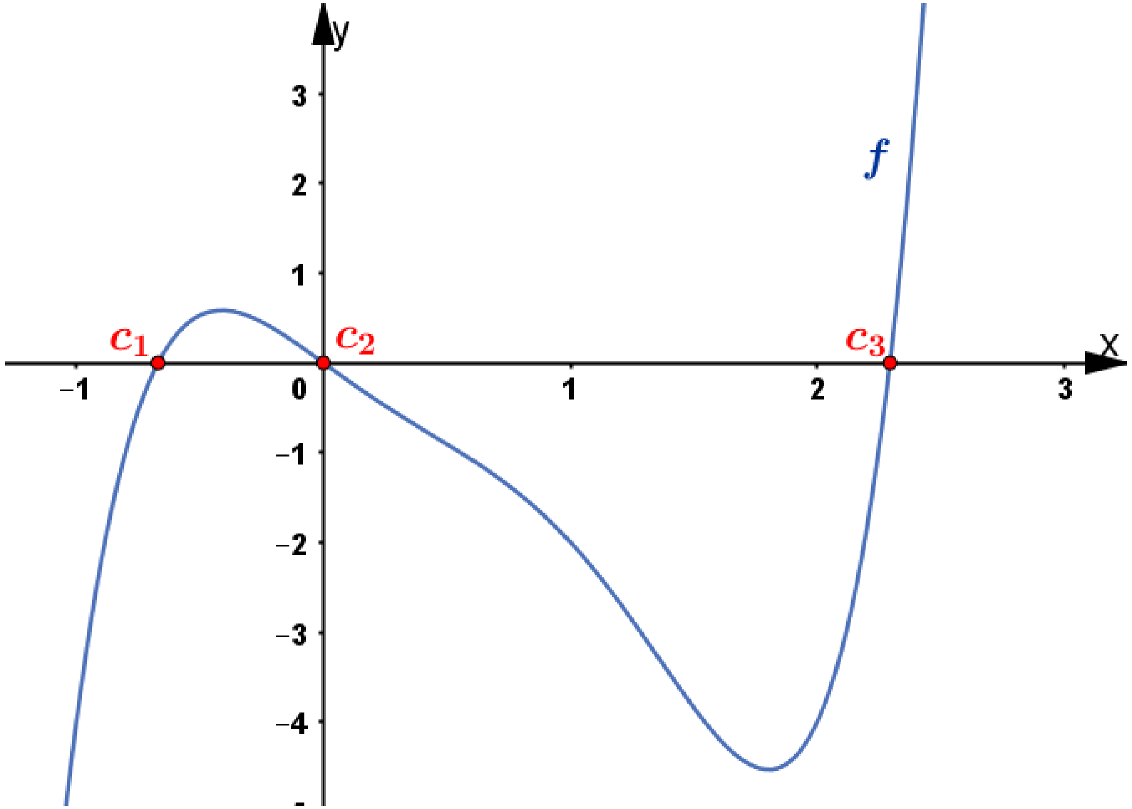
(El T. Bolzano fue visto en el capítulo de Límites y Continuidad de este curso)

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, el Teorema de Bolzano asegura que existe por lo menos un "c" tal que $f(c) = 0$ en (a, b).



MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

El método de Newton – Raphson es una técnica usada para aproximar los ceros de una función.

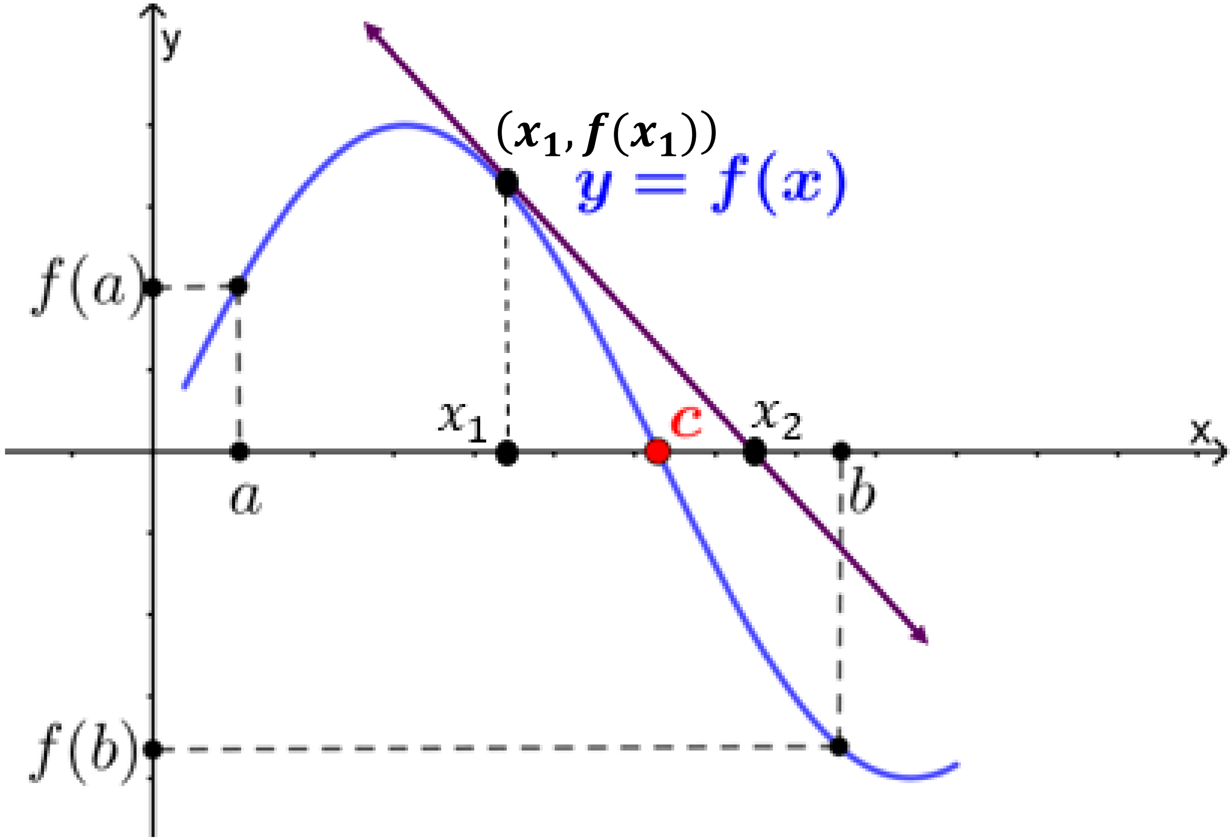


MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

- Suponga que se estima una primera aproximación en x_1.
- El método consiste en que la gráfica de f y la recta tangente en el punto de coordenadas $\left(x_1, f(x_1)\right)$ cruzan el $EjeX$ aproximadamente en el mismo punto. La x-*intersección* de la recta tangente se usa como la segunda estimación x_2 para el cero de f. La ecuación de esa recta tangente es:
- $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$

Si $y = 0$, y se despeja x se tiene:

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$



MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

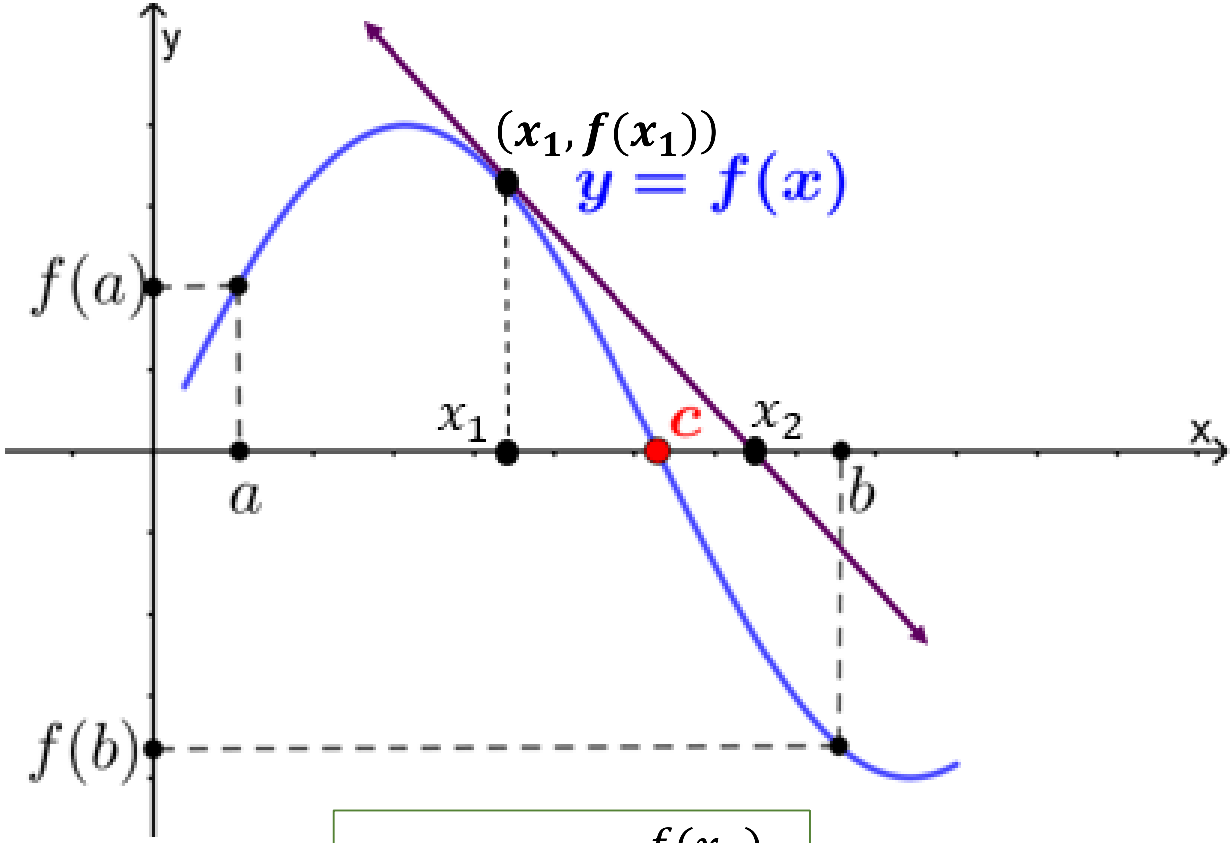
- De esta manera hemos llegado a una segunda estimación x_2 (aproximación del valor de "$\boldsymbol{c}$"):

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

- Reiterando este proceso, podemos encontrar una tercera estimación x_3 (aproximación del valor de "$\boldsymbol{c}$"):

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

- Si $|x_n - x_{n+1}|$ está en la precisión deseada, x_{n+1} sirve como aproximación final. De no ser así, se debe volver a calcular un nuevo valor.



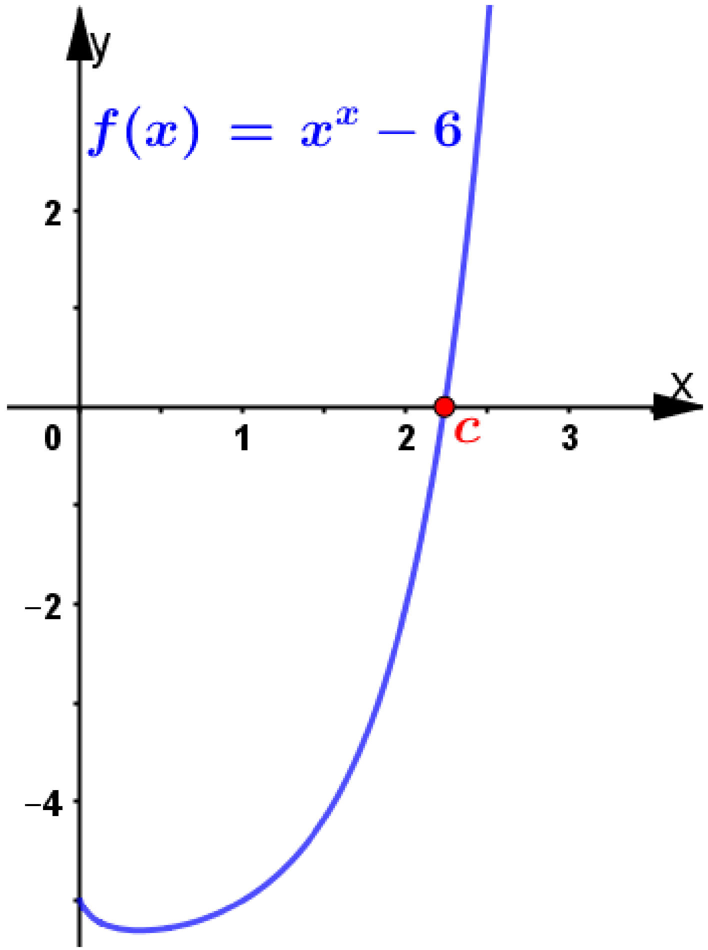
$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Ejemplo 4. Use el método de Newton-Raphson para estimar las raíces de $f(x)$ con siete decimales de precisión:

$$f(x) = x^x - 6$$

Solución:



MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Ejemplo 4. Use el método de Newton-Raphson para estimar las raíces de $f(x)$ con siete decimales de precisión:

$$f(x) = x^x - 6$$

$$f'(x) = x^x(1 + Ln(x))$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Solución:

Se considera inicialmente $\boldsymbol{x_1 = 2.5}$

Hoja de Cálculo

	A	B	C	D
1	X_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n + 1$
2	2.5	3.882117688	18.9370105369	2.2949983879
3	2.2949983879	0.7296889528	12.3202578653	2.2357716282
4	2.2357716282	0.0428241747	10.9047984198	2.2318445336
5	2.2318445336	0.0001720913	10.8172805831	2.2318286247
6	2.2318286247	0.0000000028	10.8169275681	2.2318286244

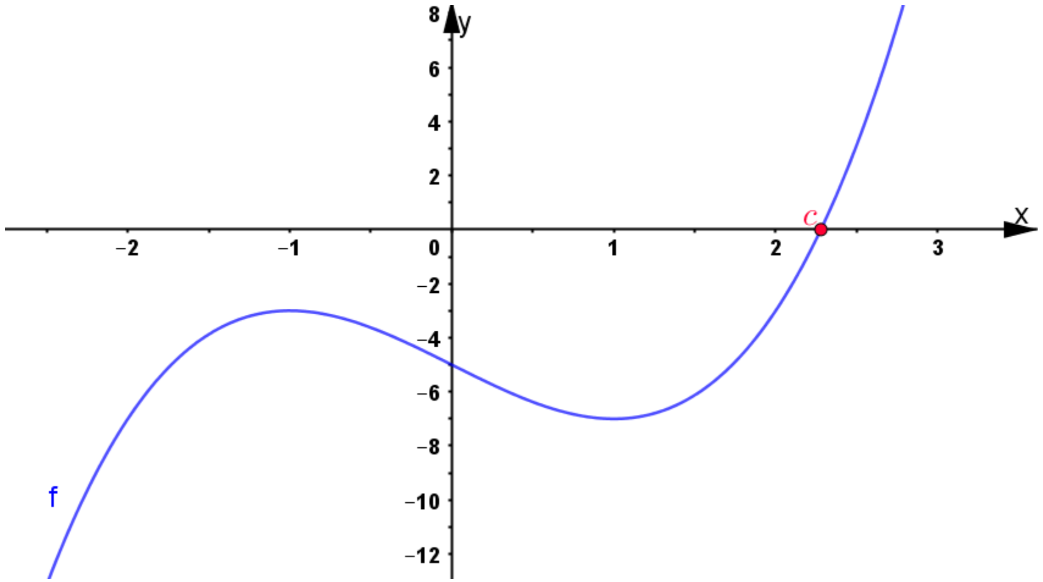
Se podría considerar como estimación a la raíz de la función dada al valor $\boldsymbol{c = 2,2318286}$.
El cual se obtuvo en la cuarta iteración.

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Ejemplo 5. Use el método de Newton-Raphson para estimar las raíces de $f(x)$ con siete decimales de precisión:

$$f(x) = x^3 - 3x - 5$$

Solución:



MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Ejemplo 5. Use el método de Newton-Raphson para estimar las raíces de $f(x)$ con siete decimales de precisión:

$$f(x) = x^3 - 3x - 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Solución:

Se considera inicialmente $\boldsymbol{x_1 = 2.4}$

	A	B	C	D
1	X_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n + 1$
2	2.4	1.624	14.28	2.2862745098039
3	2.2862745098039	0.09165024...	12.68115340...	2.2790472302975
4	2.2790472302975	0.00035788...	12.58216883...	2.2790187866062
5	2.2790187866062	0.00000000...	12.58177988...	$\boxed{2.2790187861666}$
6	2.2790187861666	0	12.58177988...	2.2790187861666

Se podría considerar como estimación a la raíz de la función dada al valor $\boldsymbol{c = 2,2790187}$.
El cual se obtuvo en la tercera iteración.

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Convergencia del método de Newton-Rapshon.

Una condición suficiente que garantiza la convergencia del método a una raíz de f es que se cumpla la desigualdad:

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1$$

Para un intervalo abierto que contenga la raíz.

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Use el método de Newton para estimar las raíces de cada función dada.

Ejercicio 2.

$$f(x) = x^2\text{-}2$$

Ejercicio 3.

$$f(x) = 2x^3+x^2 - x+1$$

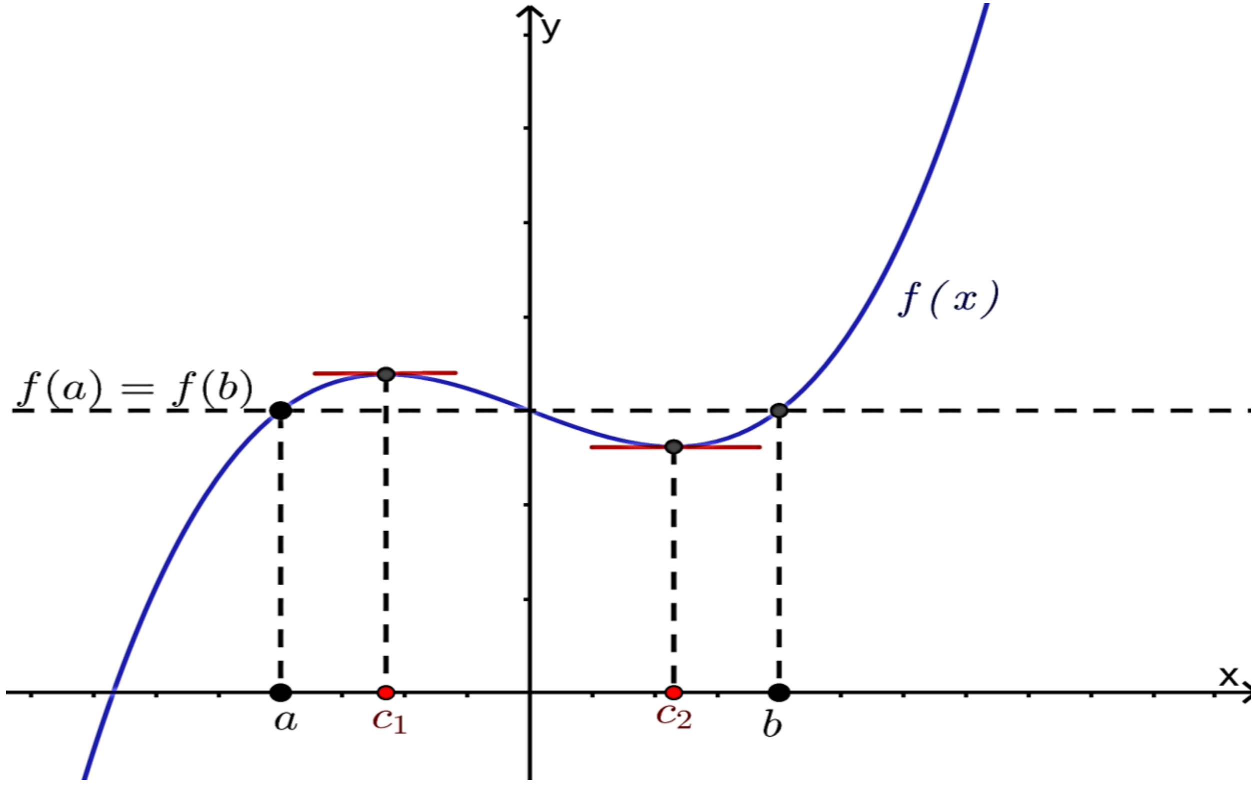
TEOREMA DE ROLLE

Sea $f(x)$ derivable en $[a, b]$ tal que:

$$f(a) = f(b),$$

entonces existe por lo menos un $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0.$$



TEOREMA DE ROLLE

Ejemplo 5. Dada la función

$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2.$

1. Determine el valor (valores) de "c" que satisfacen el Teorema de Rolle, para la función dada en el intervalo [-1,2].
2. Grafique la función dada y represente el punto (s) de coordenadas $(c, (f(c))$.

Solución:

1. Veamos que $f(x)$ satisface el Teorema de Rolle:

- $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ es derivable en $\mathbb{R}$, pues es un polinomio.
- $f(a) = f(b)$

$$f(-1) = 0,$$
$$f(2) = 0$$

Luego,

Determinemos $f'(x)$:

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$

De ahí que:

$f'(c) = 3c^2 - 4c - 1 = 0$

Despejando "c" se obtiene:

TEOREMA DE ROLLE

Ejemplo 5. Dada la función

$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2.$

1. Determine el valor (valores) de "c" que satisfacen el Teorema de Rolle, para la función dada en el intervalo [-1,2].
2. Grafique la función dada y represente el punto (s) de coordenadas $(c, (f(c))$.

Solución:

De ahí que:

$$f'(c) = 3c^2 - 4c - 1 = 0$$

Despejando "c" se obtiene:

$$c_1 = -0.22 \qquad \text{y} \qquad c_2 = 1.55$$

Los dos valores de "c" pertenecen al intervalo pedido [-1,2] y satisfacen el Teorema de Rolle.

Reemplazando los valores de "c" en la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, se obtienen las coordenadas de los puntos donde $f'(c) = 0$.

De esta manera se obtienen los puntos de coordenadas:

(-0.22, 2.11) y (1.55, -0.63)

TEOREMA DE ROLLE

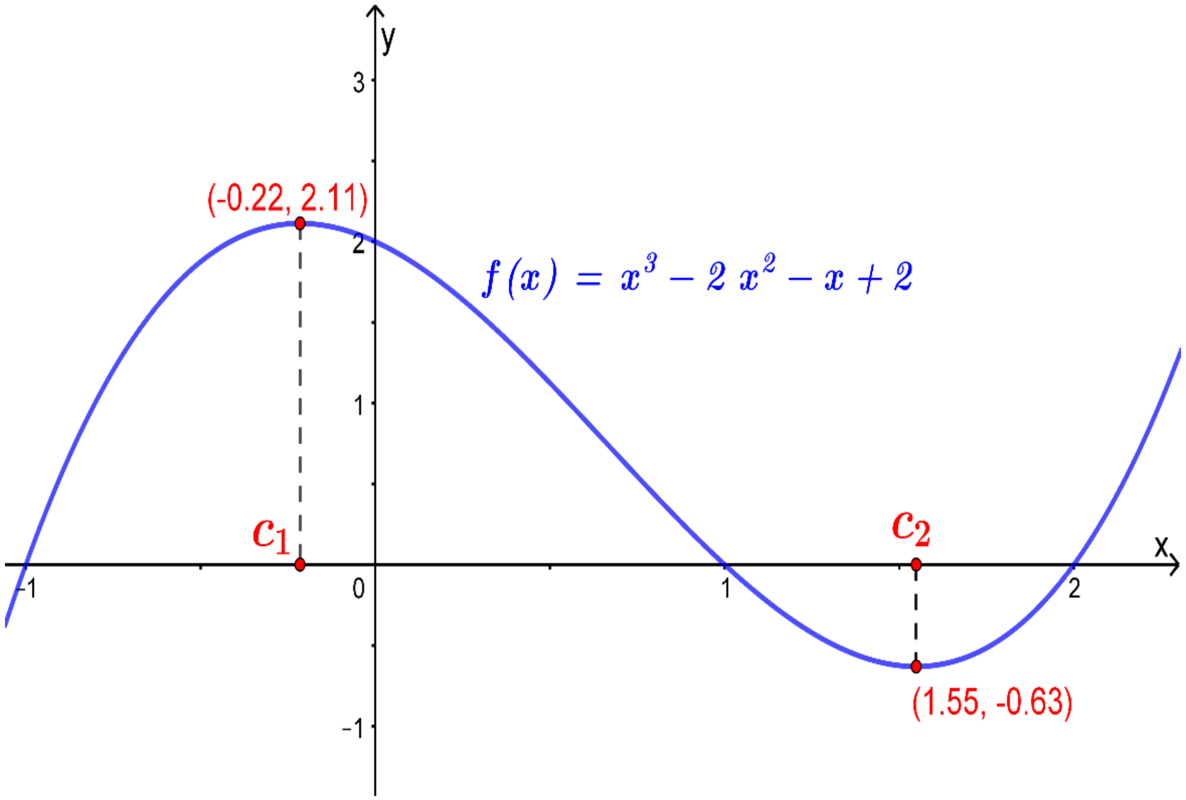
Ejemplo 5. Dada la función

$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2.$

1. Determine el valor (valores) de "c" que satisfacen el Teorema de Rolle, para la función dada en el intervalo [-1,2].
2. Grafique la función dada y represente el punto (s) de coordenadas $(c, (f(c))$.

Solución:

2. Gráfica. (Verifique cortes con ejes coordenados).



TEOREMA DE ROLLE

Ejercicio 5. Dada la función

$f(x) = x^2 - 3x + 2.$

a. Hallar las x-intersecciones de f.
b. Probar que $f'(x) = 0$ en algún punto de las x-intersecciones.
c. Encontrar el valor de "c" tal que $f'(c) = 0$.
d. Grafique.

Ejercicio 6. Dada la función

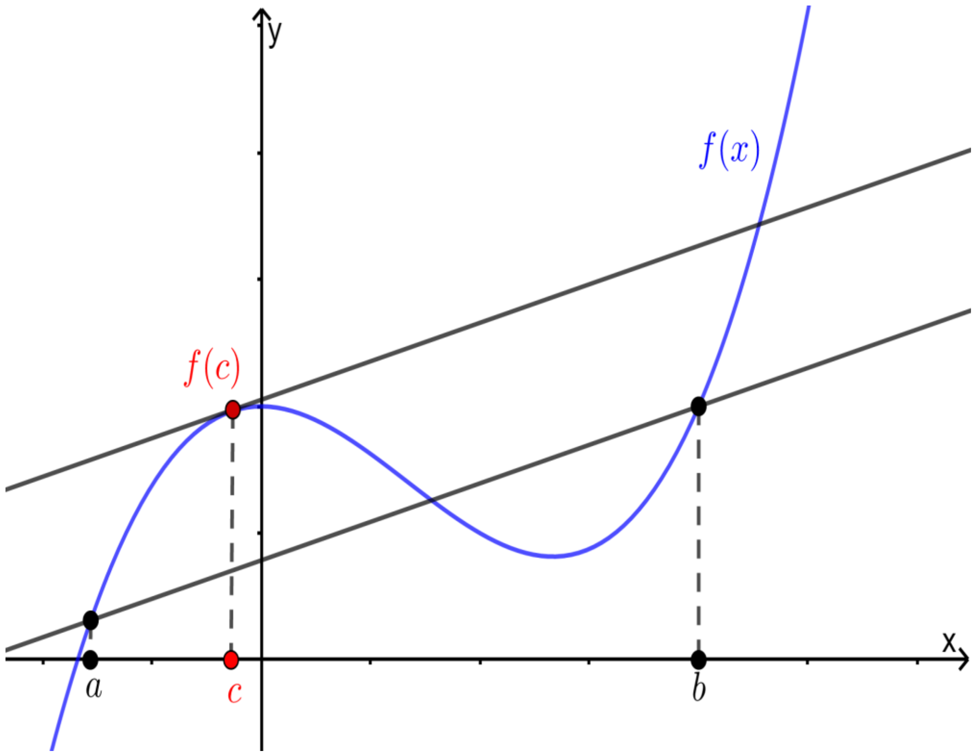
$f(x) = x^4 - 2x^2.$

Determine el valor o valores de “c” que satisfacen el Teorema de Rolle en el intervalo [-2,2]. Grafique.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS

Sea f continua en (a, b) y derivable en $[a, b]$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS

Ejemplo 6.

Dada la función $f(x) = x^2$.

a. Encuentre el valor (valores) de "c" que garantiza(n) el Teorema del Valor Medio para Derivadas en el intervalo [-1,2].

b. Determine la ecuación de la recta tangente que para por el punto $(c, f(c))$.

c. Grafique.

Solución:

a. $f(x) = x^2$ es derivable en todo ℝ, pues es un polinomio.

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} \quad \Rightarrow \quad f'(c) = 1$$

Determinemos el valor (valores) de "c" que satisface(n) el Teorema:

Si $f'(x) = 2x$ entonces $f'(c) = 2c$.

Por el resultado obtenido previamente, $f'(c) = 1$ entonces:

$$f'(c) = 2c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{2}}$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS

Ejemplo 6.

Dada la función $f(x) = x^2$.

a. Encuentre el valor (valores) de "c" que garantiza(n) el Teorema del Valor Medio para Derivadas en el intervalo [-1,2].

b. Determine la ecuación de la recta tangente que para por el punto $(c, f(c))$.

c. Grafique.

Solución:

b. Ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $(c, f(c))$. Es decir:

Punto:	**Pendiente:**
$\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$	$m = f'(c) = f'(1/2)$ $= 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

Ecuación punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{4} = 1\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{y = x - \frac{1}{4}}$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS

Ejemplo 6.

Dada la función $f(x) = x^2$.

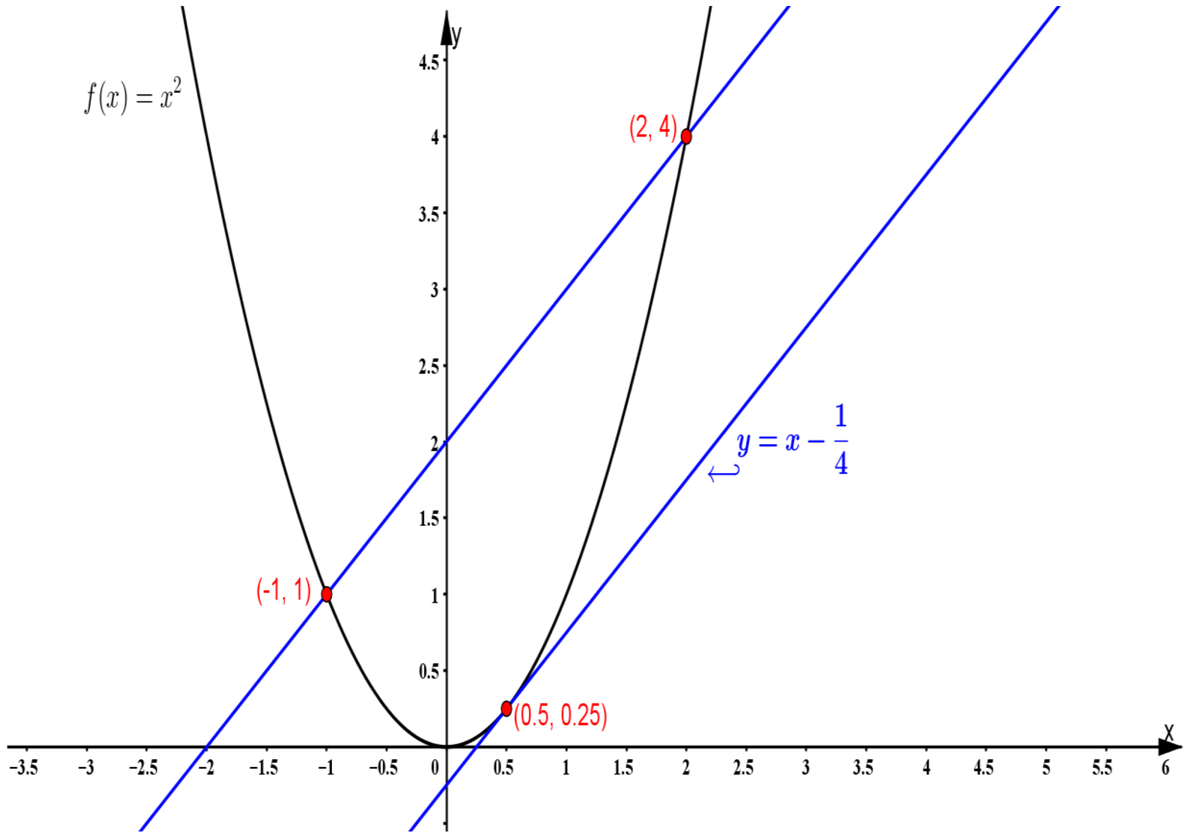
a. Encuentre el valor (valores) de "c" que garantiza(n) el Teorema del Valor Medio para Derivadas en el intervalo [-1,2].

b. Determine la ecuación de la recta tangente que para por el punto $(c, f(c))$.

c. Grafique.

Solución:

b. Gráfica:



TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS

Ejercicio 7. Dada la función

$$f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

a. Encuentre el valor (valores) de "c" que garantiza(n) el Teorema del Valor Medio para Derivadas en el intervalo [0,1].

b. Determine la ecuación de la recta tangente que para por el punto $(c, f(c))$.

c. Grafique.

Ejercicio 8. Dada la función

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x}.$$

a. Encuentre el valor (valores) de "c" que garantiza(n) el Teorema del Valor Medio para Derivadas en el intervalo [1,4].

b. Determine la ecuación de la recta tangente que para por el punto $(c, f(c))$.

c. Grafique.

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES.

Una función $f(x)$ definida en un intervalo (a, b) con x_1,x_2 en (a, b) es:

(estrictamente) Creciente si para $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$ y

(estrictamente) Decreciente si para para $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

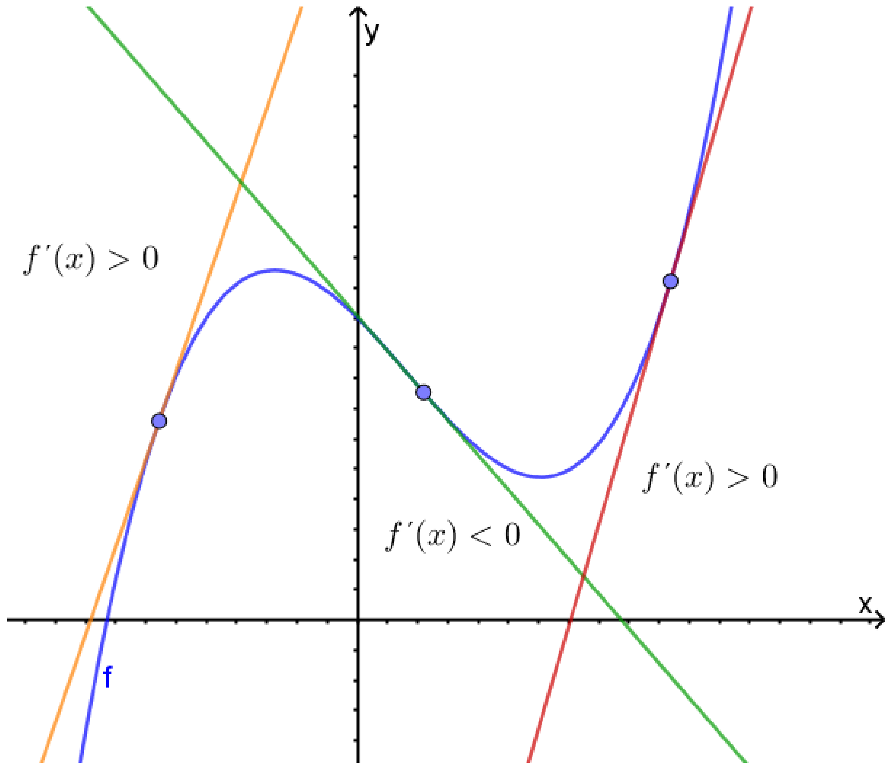
Las funciones crecientes o decrecientes se denominan *Monótonas*.

CRITERIO DE MONOTONÍA

Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

a. Si $f'(x)>0, \forall x \in (a,b)$, entonces f es ***creciente*** en $[a,b]$.

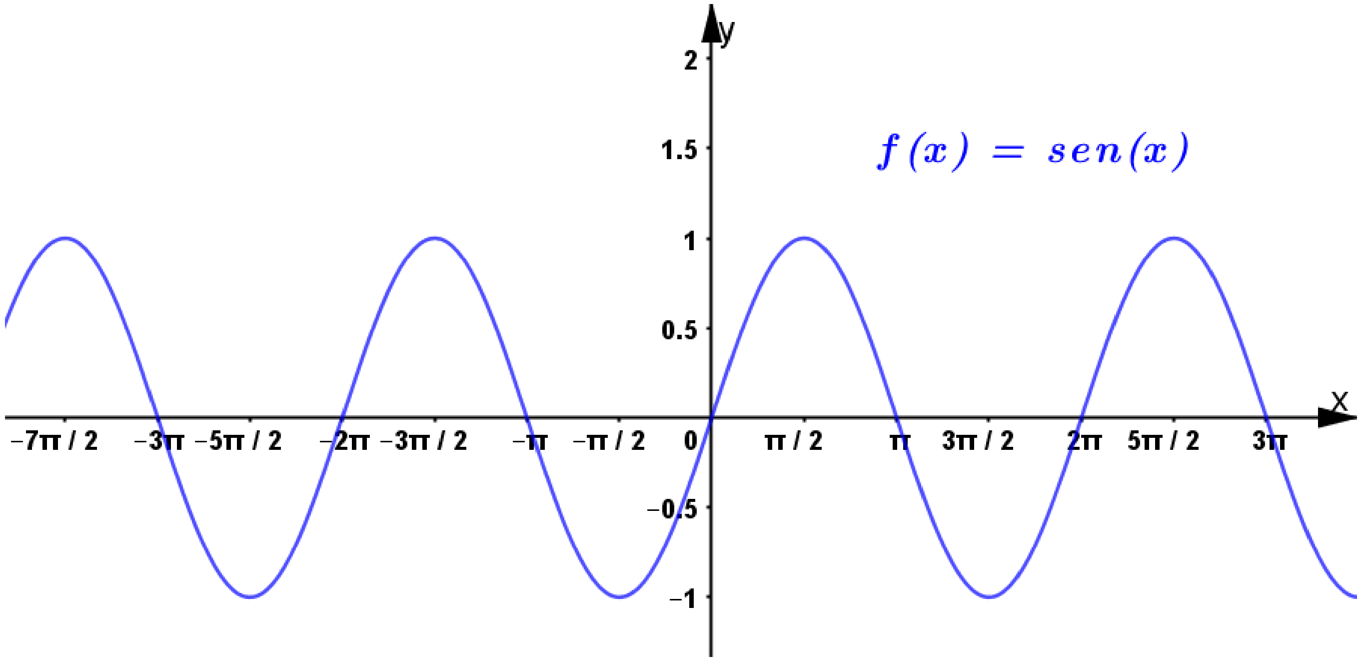
b. Si $f'(x)<0, \forall x \in (a,b)$, entonces f es ***decreciente*** en $[a,b]$.



CRITERIO DE MONOTONÍA.

Ejemplo 7.

Sea $f(x) = sen(x)$



Algunos de los intervalos donde $f(x)$ es creciente:____.

Algunos de los intervalos donde $f(x)$ es decreciente:____.

EXTREMOS RELATIVOS

Números Críticos y Puntos Críticos

Un número x_0 en el dominio de $f(x)$ se denomina ***Número Crítico*** si $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0)$ no existe. El punto de coordenadas $P(x_0, f(x_0))$ de $f(x)$ es denominado ***Punto Crítico***.

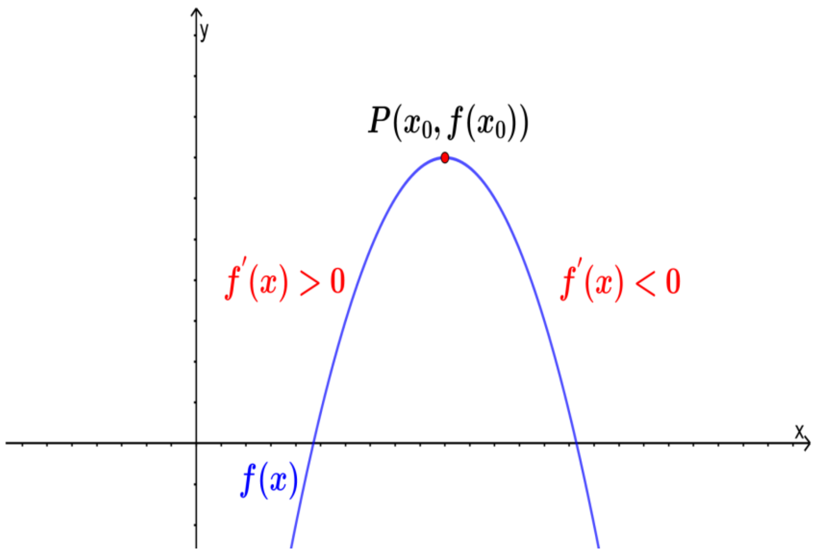
CRITERIOS PARA EXTREMOS RELATIVOS

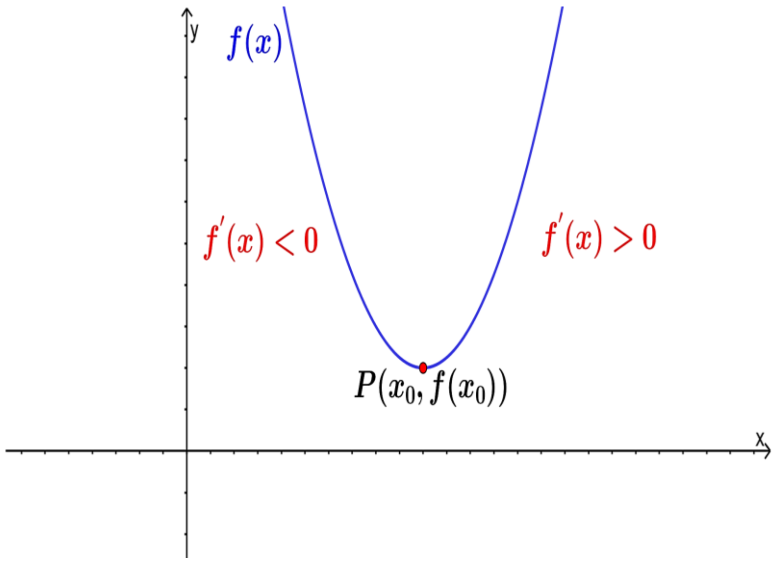
Criterio de la primera derivada para extremos relativos:

Sea x_0 un *Número Crítico* para $f(x)$, entonces el *Punto Crítico* $P(x_0, f(x_0))$es:

- Un **Máximo Relativo** si $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ a la izquierda de x_0 y $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ a la derecha de x_0.
- Un **Mínimo Relativo** si $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ a la izquierda de x_0 y $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ a la derecha de x_0.

No es extremo relativo si $f'(x)$ tiene el mismo signo a ambos lados de x_0.





CRITERIOS PARA EXTREMOS RELATIVOS

Criterio de la segunda derivada para extremos relativos:

1. Si f y f' son derivables en a, a es un ***Máximo Relativo*** si se cumple:

    a) $f'(a) = 0$
    b) $f''(a) < 0$

2. Si f y f' son derivables en a, a es un ***Mínimo Relativo*** si se cumple:

    a) $f'(a) = 0$
    b) $f''(a) > 0$

CRITERIOS PARA EXTREMOS RELATIVOS

Ejemplo 8. Determine las coordenadas de los puntos críticos de la función

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 3,$

determine cual de ellos son máximos o mínimos. Grafique.

Solución:

Derivando $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$

Se tiene:

$$\boldsymbol{f'(x) = 4x^3 - 16x}$$

Considerando $f'(x) = 0$ y despejando x:

$$4x^3 - 16x = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = 0} \text{ y } \boldsymbol{x = \pm 2}}$$

Para saber en cuál de las tres raíces hay un máximo o un mínimo, consideramos el criterio anterior en el que se determina la segunda derivada de $f(x)$:

$$\boldsymbol{f''(x) = 12x^2 - 16}$$

Y se reemplazan en ella las raíces de $f'(x)$:

CRITERIOS PARA EXTREMOS RELATIVOS

Ejemplo 8. Determine las coordenadas de los puntos críticos de la función

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 3,$

determine cual de ellos son máximos o mínimos. Grafique.

$$\boldsymbol{f''(x) = 12x^2 - 16}$$

Y se reemplazan en ella las raíces de $f'(x)$:

- $f''(\mathbf{0}) = -16 < 0$, Lo cual indica según el criterio que cuando $\boldsymbol{x = 0}$, $f(x)$ tiene un <u>máximo</u>.
- $f''(\mathbf{-2}) = 32 > 0$, Lo cual indica según el criterio que cuando $\boldsymbol{x = -2}$, $f(x)$ tiene un <u>mínimo</u>.
- $f''(\mathbf{2}) = 32 > 0$, Lo cual indica según el criterio que cuando $\boldsymbol{x = 2}$, $f(x)$ tiene un <u>mínimo</u>.

Para determinar las coordenadas de los puntos críticos (máximos y mínimos), se reemplazan las raíces de $f'(x)$ en $f(x)$ con lo que se obtiene (Verificar):

$$\boxed{(0,3),\ (-2,-13) \text{ y } (2,-13)}$$

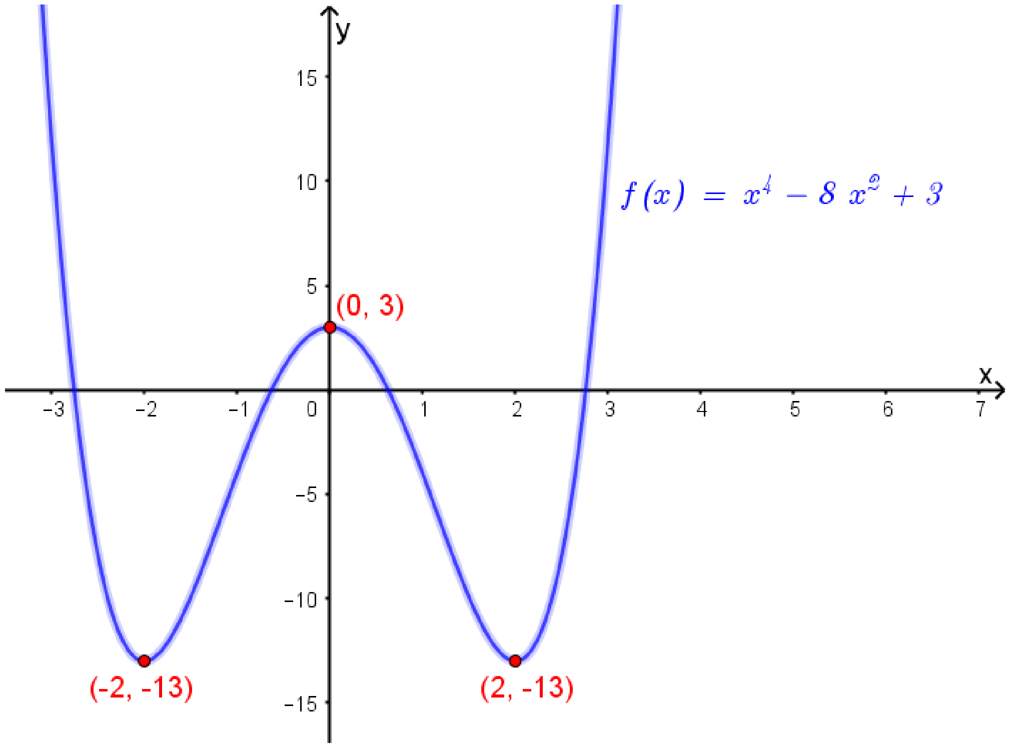
CRITERIOS PARA EXTREMOS RELATIVOS

Ejemplo 8. Determine las coordenadas de los puntos críticos de la función

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 3,$$

determine cual de ellos son máximos o mínimos. Grafique.

$\boxed{(0,3),\ (-2,-13) \text{ y } (2,-13)}$



CRITERIO DE MONOTONÍA

Ejemplo 9.

Sea $f(x) = x^2 - 2x - 2$. Determinar la monotonía de la función.

(esto es, encontrar los intervalos donde f es creciente y los intervalos donde f es decreciente.)

Solución:

Se encuentra $f'(x)$ y sus raíces:

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$2x - 2 = 0$$

Donde se obtiene:

$$\boxed{x = 1}$$

Se evalúa en $f'(x) = 2x - 2$ cualquier número que se encuentre en los intervalos determinados por las raíces, en este caso, los intervalos son:

$$\boxed{(1, \infty) \text{ y } (-\infty, 1)}$$

CRITERIO DE MONOTONÍA

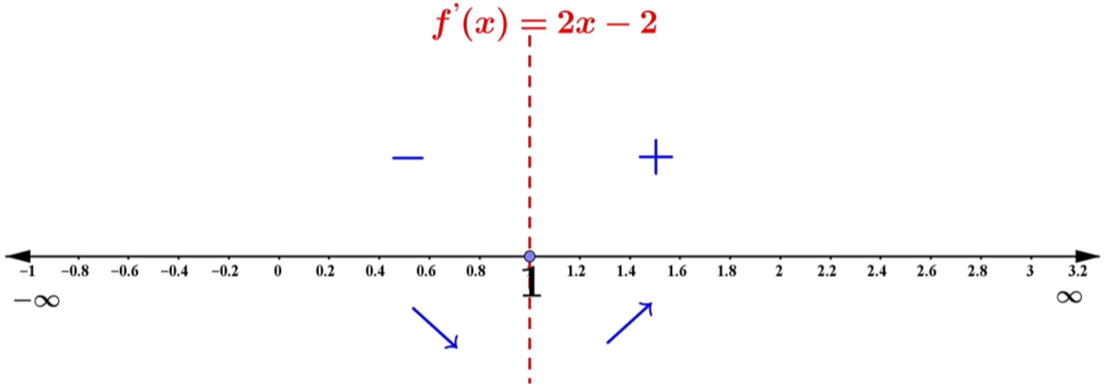
Ejemplo 9.

Sea $f(x) = x^2 - 2x - 2$. Determinar la monotonía de la función.

(esto es, encontrar los intervalos donde f es creciente y los intervalos donde f es decreciente.)

Solución:

Interv.	Número de prueba	Signo de $f'(x) = 2x - 2$	Conclusión
$(1, \infty)$	2	$f'(2) = 2 > 0$	$f(x)$ es creciente
$(-\infty, 1)$	0	$f'(0) = -2 < 0$	$f(x)$ es decreciente



CRITERIO DE MONOTONÍA

Ejemplo 9.

Sea $f(x) = x^2 - 2x - 2$. Determinar la monotonía de la función.

(esto es, encontrar los intervalos donde f es creciente y los intervalos donde f es decreciente.)

Solución:

Interv.	Número de prueba	Signo de $\boldsymbol{f'(x) = 2x - 2}$	Conclusión
$(1, \infty)$	2	$f'(2) = 2 > 0$	$f(x)$ es creciente
$(-\infty, 1)$	0	$f'(0) = -2 < 0$	$f(x)$ es decreciente

Por tanto,

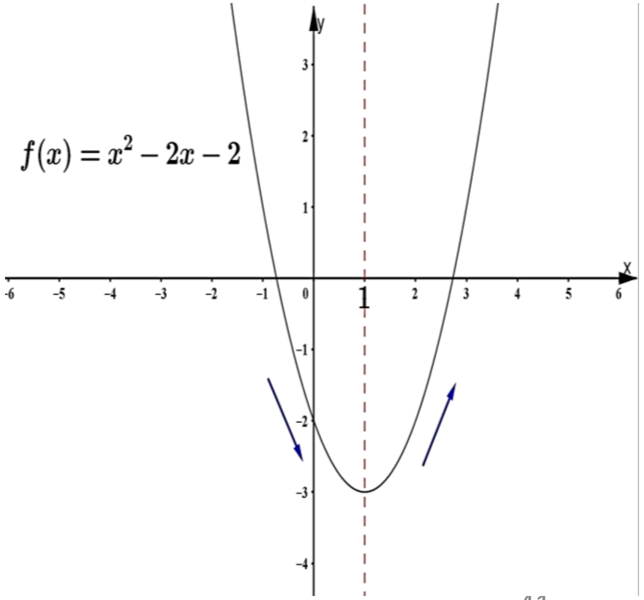
$$f(x) = x^2 - 2x - 2$$

Es creciente en el intervalo:

$$(1, \infty)$$

Es decreciente en el intervalo:

$$(-\infty, 1)$$

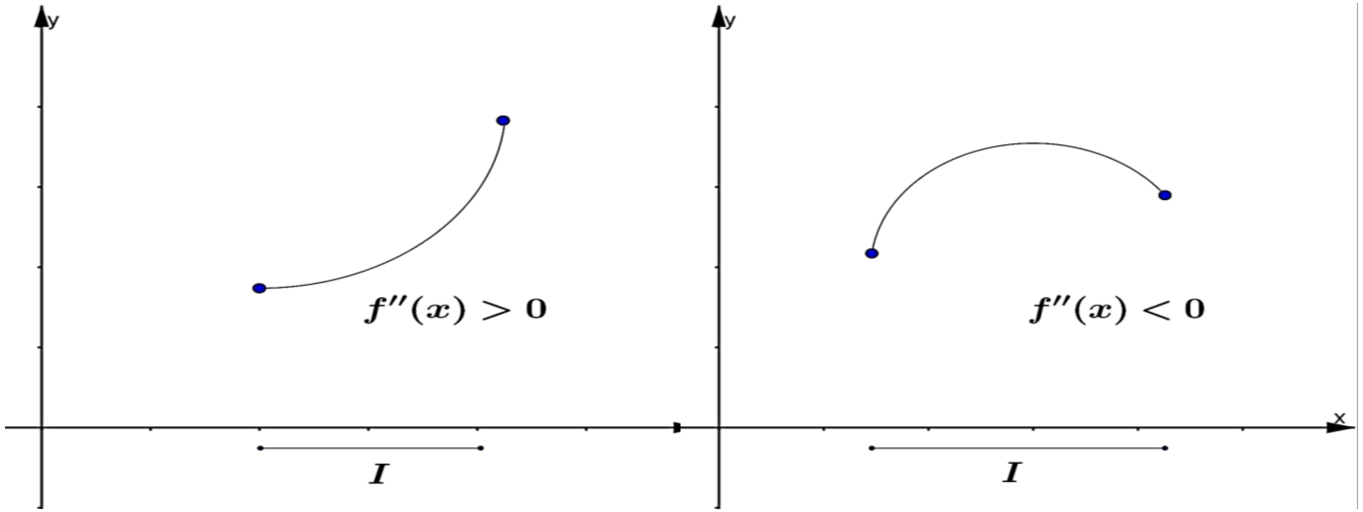


CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Teorema: Sea f una función dos veces derivable en el intervalo abierto I. Se tiene:

Si $f''(x) > 0$ para toda $x \in I$, entonces f es cóncava hacia arriba en I.

Si $f''(x) < 0$ para toda $x \in I$, entonces f es cóncava hacia abajo (convexa) en I.



CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Ejemplo 10. Sea

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4.$

Determine:

a. Los intervalos en los que $f(x)$ es creciente, decreciente.

b. Los intervalos en los que $f(x)$ es cóncava y convexa.

Solución:

a. Los intervalos en los que $f(x)$ es creciente, decreciente.

Se encuentra $f'(x)$ y sus raíces:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

Cuyas raíces son (Verificar):

$$\boxed{x = -1 \text{ y } x = 3}$$

Se evalúa en $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$ cualquier valor perteneciente a los intervalos determinados por las raíces -1 y 3:

$$\boxed{(-\infty,-1), (-1,3) \text{ y } (3,\infty)}$$

CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Ejemplo 10. Sea

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4.$

Determine:

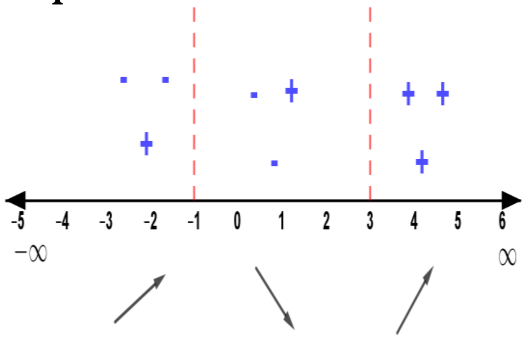
a. Los intervalos en los que $f(x)$ es creciente, decreciente.

b. Los intervalos en los que $f(x)$ es cóncava y convexa.

Interv	Núm prueba	Signo de $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ $= (x-3)(x+1)$	Conclusión
$(-\infty,-1)$			$f(x)$ es creciente
$(-1,3)$			$f(x)$ es decreciente
$(3,\infty)$			$f(x)$ es creciente

Por tanto,

$$f(x) = = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$$



Es creciente en los intervalos:

$(-\infty,-1)$ y $(3,\infty)$

Es decreciente en el intervalo:

$(-1,3)$

CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Ejemplo 10. Sea

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4.$

Determine:

a. Los intervalos en los que $f(x)$ es creciente, decreciente.

b. Los intervalos en los que $f(x)$ es cóncava y convexa.

b. Los intervalos en los que $f(x)$ es cóncava y convexa.

Se encuentra $f''(x)$ y sus raíces:

$$f''(x) = 2x - 2$$

Cuya raíz es (Verificar):

$$\boxed{x = 1}$$

Se evalúa en $f''(x) = 2x - 2$ cualquier valor perteneciente a los intervalos determinados por las raíces, estos intervalos son:

$$\boxed{(-\infty, 1) \text{ y } (1, \infty)}$$

Ejemplo 10. Sea

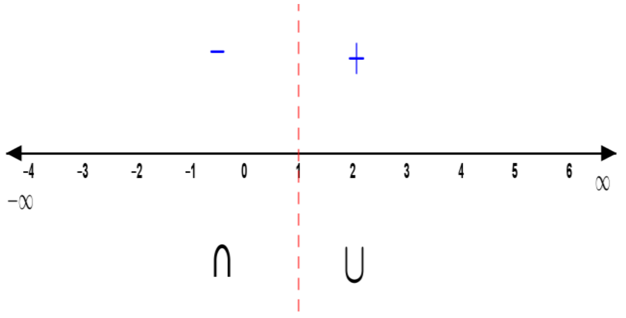
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4.$$

Determine:

a. Los intervalos en los que $f(x)$ es creciente, decreciente.

b. Los intervalos en los que $f(x)$ es cóncava y convexa.

Interv.	Núm. prueba	Signo de $\boldsymbol{f''(x) = 2x - 2}$	Conclusión
$(-\infty, 1)$			$f(x)$ es cóncava hacia abajo
$(1, \infty)$			$f(x)$ es cóncava hacia arriba



Por tanto,

$$f(x) = = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$$

Es cóncava hacia abajo en el intervalo:

$$(-\infty, 1)$$

Es cóncava hacia arriba en el intervalo:

$$(1, \infty)$$

CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Ejemplo 10. Sea

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4.$$

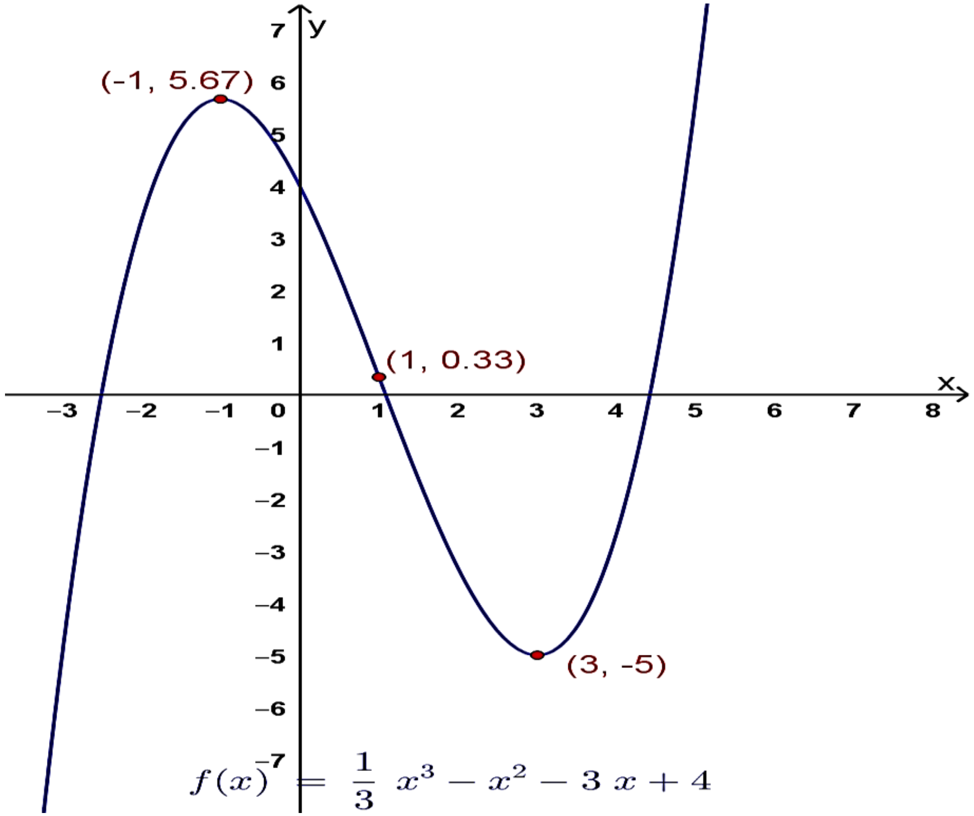
Determine:

a. Los intervalos en los que $f(x)$ es creciente, decreciente.

b. Los intervalos en los que $f(x)$ es cóncava y convexa.

b. Por tanto,

$$f(x) = = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$$



PUNTOS DE INFLEXIÓN

Se dice que $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de una función f, si existe un intervalo abierto I tal que $x_0 \in I$ y la gráfica de f es cóncava hacia arriba en (a, x_0) y cóncava hacia abajo en (x_0, b) o viceversa. En los puntos de inflexión, la función no es cóncava ni convexa.

Cálculo de los puntos de inflexión:

1. Se halla la segunda derivada y se determinan sus raíces.

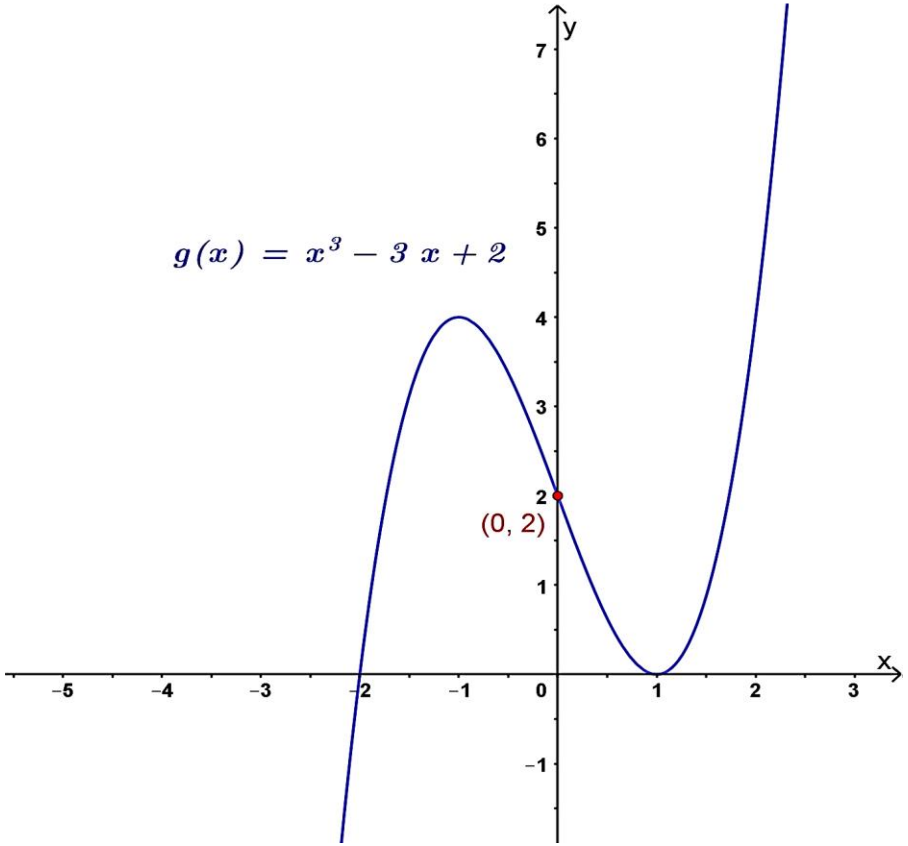
2. Se halla la tercera derivada y se calcula el signo que toman en ella las raíces de la segunda derivada, si ese valor es distinto de cero, entonces se tiene un punto de inflexión.

3. Se calcula la imagen (en la función f) del punto de inflexión. (Coordenadas del punto de inflexión).

PUNTOS DE INFLEXIÓN

Ejemplo 11. Determine las coordenadas del (los) punto(s) de inflexión de la función:

$$g(x) = x^3 - 3x + 2$$



PUNTOS DE INFLEXIÓN

Ejercicio 9. Encontrar las coordenadas del (los) punto(s) de inflexión de la función:

$$h(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$$

PUNTOS DE INFLEXIÓN

Ejercicio 10. Dada la función

$$g(x) = x^4 - 4x^2.$$

Determinar:

a. Coordenadas de los puntos de corte con los ejes coordenados.

b. Coordenadas de los extremos relativos.

c. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d. Coordenadas de los puntos de inflexión.

e. Intervalos de concavidad.

f. Gráfica de la función $g(x)$.

RESUMEN PARA GRAFICAR FUNCIONES

Considerar:

- Dominio y Rango.
- Intersecciones con los ejes coordenados.
- Simetrías.
- Continuidad.
- Asíntotas.
- Monotonía.
- Puntos Extremos.
- Concavidad.
- Puntos de Inflexión.

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

Si una variable $\boldsymbol{y}$ depende del tiempo $\boldsymbol{t}$, entonces su derivada $\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}}$ se denomina *Razón de Cambio*.

Por ejemplo: Si $\boldsymbol{y}$ mide la distancia, entonces esta *Razón de Cambio* también se llama *Velocidad*, otros casos son: la razón a la que fluye el agua al interior de un depósito, la tasa a la cual el área de un derrame de petróleo está creciendo, la razón a la cual el valor de una propiedad está aumentando. etc.

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

Considerar:

- ¿Qué razón de cambio está dada?
- ¿Qué razón de cambio quiero conocer?
- ¿Cómo se relacionan las variables?

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

Ejemplo 12. Una mancha con forma de cilindro circular recto se ha formado al derramarse en el mar 100 m^3 de petróleo.

Calcular con qué rapidez aumenta el radio (R) de la mancha, si el espesor (E) disminuye a razón de 0.1m/hora en el instante en que R = 50 m.

Solución:

¿Qué razón de cambio está dada?

$$\frac{dE}{dt} = -0.1m/hora$$

¿Qué razón de cambio quiero conocer?

$\frac{dR}{dt}$, Cuando $R = 50m$

¿Cómo se relacionan las variables?

(Volumen de un cilindro circular recto)

$$V = \pi R^2 E \qquad \textbf{(1)}$$

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

Ejemplo 12. Una mancha con forma de cilindro circular recto se ha formado al derramarse en el mar 100 m^3 de petróleo.

Calcular con qué rapidez aumenta el radio (R) de la mancha, si el espesor (E) disminuye a razón de 0.1m/hora en el instante en que R = 50 m.

Solución:

$$\boxed{V = \pi R^2 E} \qquad \textbf{(1)}$$

Derivando (1) con respecto a t se tiene:

$$\frac{dV}{dt} = \pi\left[2R\left(\frac{dR}{dt}\right)E + R^2\left(\frac{dE}{dt}\right)\right]$$

Como V es constante, su derivada es igual a cero:

$$0 = \pi\left[2R\left(\frac{dR}{dt}\right)E + R^2\left(\frac{dE}{dt}\right)\right]$$

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

Ejemplo 12. Una mancha con forma de cilindro circular recto se ha formado al derramarse en el mar 100 m^3 de petróleo.

Calcular con qué rapidez aumenta el radio (R) de la mancha, si el espesor (E) disminuye a razón de 0.1m/hora en el instante en que R = 50 m.

Solución:

De ahí que:

$$2R\left(\frac{dR}{dt}\right)E + R^2\left(\frac{dE}{dt}\right) = 0$$

Despejando $\frac{dR}{dt}$ (La razón de cambio buscada):

$$\boxed{\frac{dR}{dt} = \frac{-R\left(\frac{dE}{dt}\right)}{2E}} \qquad (2)$$

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

Ejemplo 12. Una mancha con forma de cilindro circular recto se ha formado al derramarse en el mar 100 m^3 de petróleo.

Calcular con qué rapidez aumenta el radio (R) de la mancha, si el espesor (E) disminuye a razón de 0.1m/hora en el instante en que R = 50 m.

Solución:

$$V = \pi R^2 E \quad \textbf{(1)}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{-R\left(\frac{dE}{dt}\right)}{2E} \quad \textbf{(2)}$$

Dado que E no es conocido:

Cuando $V = 100m^3$ y $R = 50m$, se tiene para (1):

$$E = \frac{V}{\pi R^2}$$

$$E = \frac{100}{\pi(50)^2}$$

$$E = \frac{0.04}{\pi}$$

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

Ejemplo 12. Una mancha con forma de cilindro circular recto se ha formado al derramarse en el mar 100 m^3 de petróleo.

Calcular con qué rapidez aumenta el radio (R) de la mancha, si el espesor (E) disminuye a razón de 0.1m/hora en el instante en que R = 50 m.

Solución:

Reemplazando los datos dados, se tiene para (2):

$$\frac{dR}{dt} = \frac{-50(-0.1)}{2\left(\frac{0.04}{\pi}\right)}$$

$$\boldsymbol{\frac{dR}{dt} = 62.5\pi\ m/h}$$

Por tanto, el radio está aumentando a razón de $\boldsymbol{62.5\pi\ m/h}$.

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

Ejercicio 11.

Se realiza el vaciado de un grano proveniente de un silo a razón de $0.5\, m^3/\, min$. El grano forma un cono circular recto cuya altura es constantemente igual a $5/4$ del radio de la base. Determinar:

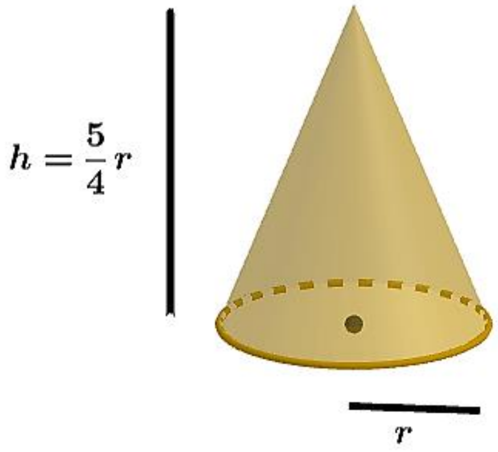
¿A qué velocidad está subiendo el vértice del cono cuando la altura es de $1.50\ m$?

¿Cuál es el radio de la base del cono en ese momento y a qué velocidad está variando?

¿Qué razón de cambio está dada?

¿Qué razón de cambio quiero conocer?

¿Cómo se relacionan las variables?



LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

Ejercicio 12.

Una fábrica vende $\boldsymbol{q}$ miles de artículos fabricados cuando su precio es de $\boldsymbol{p}$ dólares/unidad. Se ha determinado que la relación entre $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ es:

$$q^2 - 2q\sqrt{p} - p^2 - 31 = 0$$

Si el precio $\boldsymbol{p}$ del artículo es de 9 dólares y se incrementa a una tasa de 0,20 dólares/semana.

Determinar:

El número de artículos vendidos a 9 dólares. La rapidez a la que cambia la cantidad de unidades vendidas por semana cuando el precio es de 9 dólares.

¿Qué razón de cambio está dada?

¿Qué razón de cambio quiero conocer?

¿Cómo se relacionan las variables?

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

Ejercicio 13.

Para estimar la cantidad de madera que produce el tronco de un árbol se supone que el mismo tiene la forma de cono truncado. Siendo: $\boldsymbol{r}$ el radio de la base superior; ***R*** el radio de la base inferior y $\boldsymbol{h}$ la altura.

¿Cuál es la rapidez de variación del volumen $\boldsymbol{V}$ en el momento en que: $r = 60cm$, $R = 90\ cm$ y $h = 15m$, si el incremento de $\boldsymbol{r}$ es de $10\ cm/año$, el incremento de $\boldsymbol{R}$ es de $15\ cm/año$ y el de $\boldsymbol{h}$ de $25\ cm/año$? Expresar el resultado en $m^3/año$.

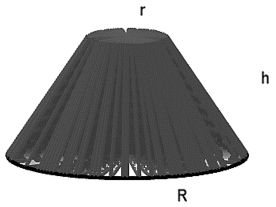
Recordando que el volumen $\boldsymbol{V}$ de un cono truncado está dado por la expresión:

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2).$$

¿Qué razón de cambio está dada?

¿Qué razón de cambio quiero conocer?

¿Cómo se relacionan las variables?



LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

Ejercicio 14.

Si el nivel medio diario C de monóxido de carbono $C0_2$ en el aire, en partes por millón (ppm), en una ciudad está relacionado con la población p expresada en miles de habitantes a medida que pasan los años, dichas relaciones están dadas por:

$$C(p) = \sqrt{\frac{p^2}{4} + 3}$$

Mientras que la población se estima por la expresión:

$$p(t) = 0.01 + 0.2t^3$$

Calcule la rapidez con la que varía la concentración de $C0_2$ dentro de 5 años.

¿Qué razón de cambio está dada?

¿Qué razón de cambio quiero conocer?

¿Cómo se relacionan las variables?

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

Ejercicio 15. La población P de una colonia de bacterias que tiene el supuesto de espacio y alimentos ilimitados, varía con el tiempo de acuerdo con la expresión:

$$P(t) = ce^{kt}$$

con c y k constantes, t en horas y k en 1/hora.

a. Si en el instante inicial $t = 0$ la población era de 1000 bacterias y al cabo de 1 hora la misma se duplicó, determinar los valores de c y k.

b. Realizar el gráfico de la función P.

c. Hallar la velocidad v de crecimiento de la población en función de t.

d. Calcular la población al cabo de 2 horas y la velocidad de crecimiento en ese instante.

¿Qué razón de cambio está dada?

¿Qué razón de cambio quiero conocer?

¿Cómo se relacionan las variables?

OPTIMIZACIÓN

Resolver un problema de optimización consiste principalmente en encontrar un máximo o un mínimo (absolutos) de una función dada en un intervalo determinado. Dicha función puede representar áreas, volúmenes, consumo, beneficio, coste, distancia, resistencia, etc.

OPTIMIZACIÓN

Considerar:

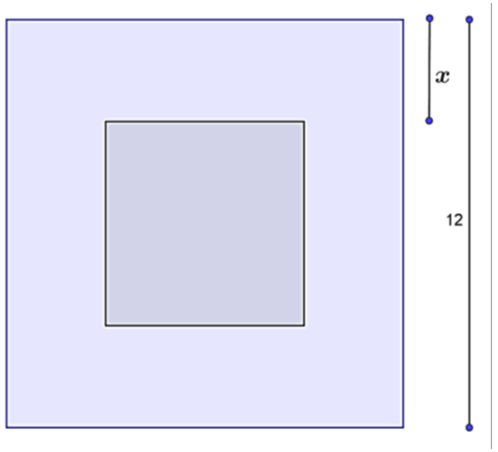
1. Plantear la función que hay que optimizar.
2. Plantear una ecuación que relacione las variables. (Si hay más de una).
3. Despejar una variable de la ecuación y sustituirla en la función. (Para que quede una sola variable).
4. Derivar la función, igualarla a cero y obtener sus raíces.
5. Determinar la segunda derivada y evaluar las raíces del punto anterior en ella. (Criterio de la segunda derivada).

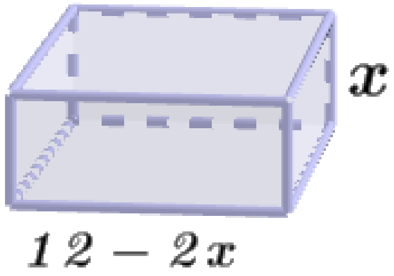
OPTIMIZACIÓN

Ejemplo 13. Se quiere construir una caja sin tapa de volumen máximo a partir de una hoja cuadrada de 12cm de lado recortando cuadrados iguales en las esquinas de longitud "x".

¿Cuál debe ser el lado de los cuadrados que se cortan para obtener dado valor máximo?

Solución:





Sea "v", el volumen de la caja.

1. $v(x) = (12 - 2x)^2 x$

$$v(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$$

4. $v'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 0$

$$= 12(x^2 - 8x + 12) = 0$$
$$= (x^2 - 8x + 12) = 0$$
$$= (x - 6)(x - 2) = 0$$

$$\boxed{x = 6 \text{ y } x = 2}$$

5. $v''(x) = 24x - 96$

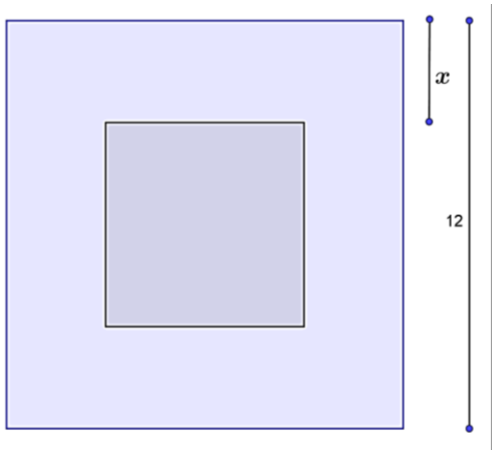
$$v''(6) = 48$$
$$v''(2) = -48$$

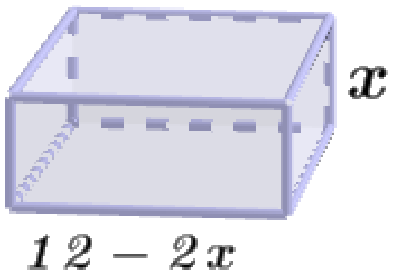
OPTIMIZACIÓN

Ejemplo 13. Se quiere construir una caja sin tapa de volumen máximo a partir de una hoja cuadrada de 12cm de lado recortando cuadrados iguales en las esquinas de longitud "x".

¿Cuál debe ser el lado de los cuadrados que se cortan para obtener dado valor máximo?

Solución:





Sea "v", el volumen de la caja.

$$\boxed{x = 6 \text{ y } x = 2}$$

5. $v''(x) = 24x - 96$

$$v''(6) = 48$$

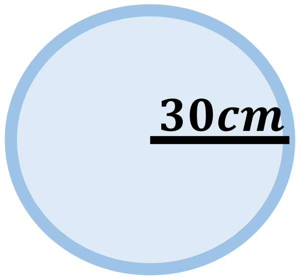
$$v''(2) = -48$$

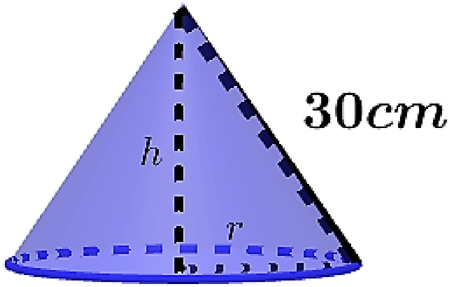
Luego, v tiene un valor máximo en $\boldsymbol{x = 2}$. Por tanto, se deben recortar cuadrados de 2cm de lado para que la caja tenga volumen máximo.

OPTIMIZACIÓN

Ejercicio 16. Una boya formada por dos conos rectos de hierro unidos por sus bases ha de ser construida mediante dos placas circulares de 30cm de radio.

Calcular las dimensiones de la boya para que su volumen sea máximo.

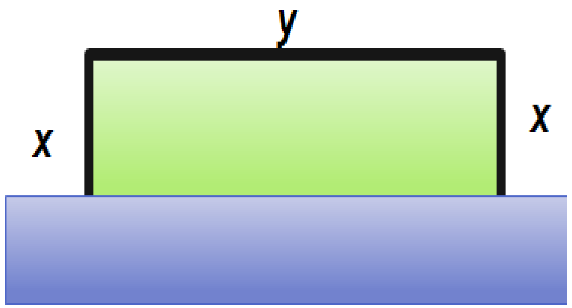


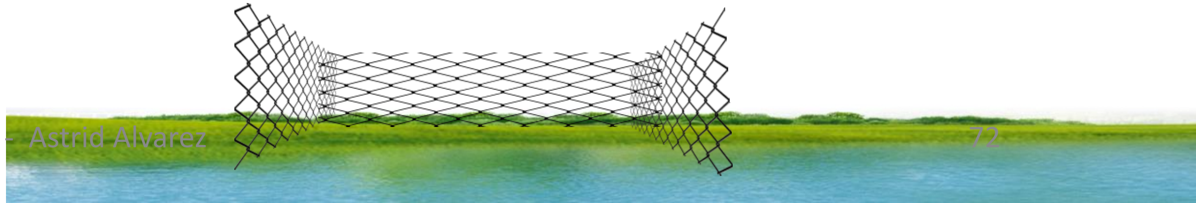


OPTIMIZACIÓN

Ejercicio 17. Una persona posee 1200 metros de malla y desea cercar un terreno rectangular que está cerca a un río.

Si no necesita cercar el lado que da al río, ¿cuáles son las dimensiones del terreno que posee el área más grande para así optimizar su malla?





OPTIMIZACIÓN

Ejercicio 18. Un fabricante quiere diseñar una caja abierta con una lámina de cartón de 150 pulgadas cuadradas, cuya base sea cuadrada.

¿Qué dimensiones permiten construir una caja sin tapa de volumen máximo?