CÁLCULO 2

CAPÍTULO 1
INTEGRAL INDEFINIDA
con enlaces a material audiovisual

ASTRID ALVAREZ CASTRO-WWW.MATHSPACE.JIMDO.COM

INTRODUCCIÓN DEL CURSO

Los contenidos del curso se desarrollarán con el apoyo de los vídeos de *Khan Academy*, videos propios, guías de clase y talleres propuestos que estarán disponibles en www.mathspace.jimdo.com.

Usted debe ver los videos de este documento previamente a las reuniones programadas, en las que se discutirán los contenidos y ejercicios propuestos.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL INDEFINIDA, ANTIDERIVADA O PRIMITIVA

Se denomina a $F(x)$ una integral indefinida de $f(x)$ en el intervalo I, si $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$.

La integral indefinida de una función dada no es única.

Ejemplo 1.

$x^2,\ x^2 + 2, x^2 - \pi, x^2 + C.$ (C, constante).

Son las primitivas o integrales indefinidas de $f(x) = 2x$. Ya que:

$$\frac{d}{dx}x^2 = \frac{d}{dx}(x^2 + 2) = \frac{d}{dx}(x^2 - \pi) = \frac{d}{dx}(x^2 + C) = 2x$$

Todas las primitivas de $f(x) = 2x$ están representadas por la expresión $x^2 + C$ en la que C es una constante cualquiera y se denomina *Constante de Integración*.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL INDEFINIDA, ANTIDERIVADA O PRIMITIVA

Notación: Se llamará Integral Indefinida de la función $\boldsymbol{f(x)}$, al conjunto de todas las antiderivadas de la función $\boldsymbol{f(x)}$, y se denotará como:

$$\int f(x)dx$$

Esta expresión se lee: Integral de $f(x)$ con respecto a "x”.

INTEGRAL INDEFINIDA DE “x" ELEVADA A UNA POTENCIA (n≠-1)

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Dado que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) + \frac{d}{dx}(C)$$

$$= \frac{(n+1)x^n}{n+1} + 0$$

$$= x^n$$

Ejemplo 2.

INTEGRAL INDEFINIDA DE “x" ELEVADA A UNA POTENCIA (n≠-1)

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Ejemplo 3.

Determinar la integral de cada una de las siguientes funciones

a. $\int x^{-3}dx$

b. $\int \sqrt[5]{x}dx$

a. $$\int x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C$$

$$= \frac{x^{-2}}{-2} + C$$

$$= -\frac{1}{2x^2} + C$$

b. $$\int \sqrt[5]{x}dx = \int x^{1/5}dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} + C$$

$$= \frac{x^{6/5}}{6/5} + C$$

$$= \frac{5}{6}\sqrt[5]{x^6} + C$$

$$= \frac{5}{6}x\sqrt[5]{x} + C$$

INTEGRAL INDEFINIDA DE “x" ELEVADA A UNA POTENCIA: (n≠-1)

$$\boxed{\int x^n\,dx \quad = \quad \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

Ejercicio 1.

Determinar la integral de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^7$

b. $g(x) = x^{-\pi}$

c. $h(x) = x^{-9}$

d. $i(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$

e. $j(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}}}$

f. $m(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{x^5}}}$

PROPIEDADES DE LINEALIDAD

La Integral Indefinida cumple con las propiedades de linealidad, es decir:

1. $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx \qquad = \qquad \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

2. $\int kf(x)\, dx \qquad = \qquad k \int f(x)\, dx; \qquad\qquad k \in \mathbb{R}$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración directa

Este método aplica cuando de manera inmediata se identifica la regla correspondiente en la Tabla de Integrales, ya sea haciendo uso de recursos algebraicos, como los radicales y las potencias empleadas en los ejercicios previos, además de recursos trigonométricos, entre otros, según sea el caso.

Ejemplo 4.

$$\int \frac{1}{8+x^2}dx = \int \frac{1}{\left(\sqrt{8}\right)^2 + x^2}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}}Arctan\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right) + C$$

$$\boxed{23. \int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}Arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C}$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración directta

Ejemplo 5.

$$\int\left(\frac{2e}{x}+\pi\cos(3x)-\frac{1}{4}e^{x}dx\right) = \int\frac{2e}{x}dx+\int\pi\cos(3x)\,dx-\int\frac{1}{4}e^{x}dx$$

$$= 2e\int\frac{1}{x}dx+\pi\int\cos(3x)\,dx-\frac{1}{4}\int e^{x}dx$$

$$= 2eLn|x|+\pi\frac{sen(3x)}{3}-\frac{1}{4}e^{x}+C$$

$$3.\int\frac{1}{x}dx=Ln|x|+C$$

$$18.\int cos(ax)\,dx=\frac{sen(ax)}{a}+C$$

$$4.\int e^{x}\,dx=e^{x}+C$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración directa

Ejercicio 2.

a. $\int (1-3x)^2\,dx$

b. $\int (3x^4 + 23x^{-5})\,dx$

c. $\int 3x^2\sqrt[3]{8x^4}\,dx$

d. $\int x(x+3)(x-1)\,dx$

e. $\int 7\cosh(x)\,dx$

f. $\int 5(22^x)\,dx$

g. $\int esec^2(x)\,dx$

h. $\int \left(\frac{-5}{x} + \frac{1}{3}e^x\right)dx$

i. $\int (x^e - e^x)\,dx$

j. $\int (e^{x+3} + e^2(x+1) - 10)\,dx$

k. $\int \frac{senx}{cos^2x}dx$

l. $\int \frac{1}{3+x^2}dx$

m. $\int \frac{(2-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx$

n. $\int \frac{1}{cos(x)} - \frac{1}{sen^2(x)}dx$

o. $\int \frac{senx}{1+senx}dx$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración por sustitución o cambio de variable

Repaso: función compuesta.

Sean $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$

Si F es una primitiva de f en un intervalo I, entonces:

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F\big(g(x)\big) + C$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración por sustitución o cambio de variable

Ejemplo 6.

Ejemplo 7.

Ejemplo 8.

Ejemplo 9.

Ejemplo 10.

Ejemplo 11.

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración por sustitución o cambio de variable

Ejemplo 12.

$$\int (sen(x^2)+3)^8 2xcos(x^2)dx \quad = \quad \int u^8 du$$

$$u = sen(x^2)+3$$

$$\frac{du}{dx} = 2xcos(x^2)$$

$$du = 2xcos(x^2)dx$$

$$= \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \frac{(sen(x^2)+3)^9}{9} + C$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración por sustitución o cambio de variable

Ejercicio 3.

a. $\int (1+x)^7\, dx$

b. $\int (1-x)^7\, dx$

c. $\int 2x(x^2+3)^4\, dx$

d. $\int (2x+4)(x^2+4x)^8\, dx$

e. $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+3}}\, dx$

f. $\int \frac{1}{2x+9}\, dx$

g. $\int e^{4x}\, dx$

h. $\int e^{-x}\, dx$

i. $\int a^{3x}\, dx$

j. $\int sen(4x)\, dx$

k. $\int \frac{sen(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$

l. $\int \pi x\sqrt{x-1}\, dx$

m. $\int sen^3(x)\cos(x)\, dx$

n. $\int 3x cos(x^2)\, dx$

o. $\int \frac{Arctan(x)}{x^2+1}\, dx$

p. $\int \frac{6x^2+1}{(4x^3+2x)^9}\, dx$

q. $\int \frac{1}{4-x}\, dx$

r. $\int sen\left(\frac{1}{4}x\right) dx$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración por partes

Es una técnica útil cuando la función a integrar es un producto de funciones algebraicas o trascendentes.
Esto es:

$$\boxed{\int f dg = fg - \int g df}$$

Tenga en cuenta:
1. La parte que se iguala a dg, debe ser fácilmente integrable.
2. $\int gdf$ no debe ser más complicada que $\int fdg$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración por partes

$$\int f dg = fg - \int g df$$

Ejemplo 13.

$$\int 2xLn(x)dx \quad = \quad Ln(x)(x^2) - \int x^2 \frac{1}{x} dx$$

$$= \quad x^2 Ln(x) - \int x dx$$

$$= \quad x^2 Ln(x) - \frac{x^2}{2} + C$$

$$f = Ln(x)$$
$$df = \frac{1}{x} dx$$

$$dg = 2x dx$$
$$g = x^2 + C_1$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \; ; n \neq -1$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración por partes

$$\boxed{\int f dg = fg - \int g df}$$

Ejemplo 14.

$$\int e^x sen(x)dx = sen(x)e^x - \int e^x \cos(x)\, dx$$

$$f = sen(x)$$
$$df = cos(x)\, dx$$
$$dg = e^x dx$$
$$\int dg = \int e^x dx$$
$$g = e^x + C_1$$

$$= e^x sen(x) - \left(\cos(x)\, e^x - \int e^x(-sen(x))dx \right)$$

$$= e^x sen(x) - e^x \cos(x) - \int e^x sen(x)dx$$

$$f_1 = cos(x)$$
$$df_1 = -sen(x)\, dx$$
$$dg_1 = e^x dx$$
$$\int dg_1 = \int e^x dx$$
$$g_1 = e^x + C_2$$

$$2\int e^x sen(x = e^x sen(x) - e^x \cos(x)$$

$$= \frac{e^x sen(x) - e^x \cos(x)}{2} + C$$

$$= \frac{e^x}{2}(sen(x) - \cos(x)) + C$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración por partes

Ejercicio 4.

1. $\int 2xsenx\,dx$
2. $\int xe^{x}\,dx$
3. $\int x^{2}e^{3x}\,dx$
4. $\int (2x^{2}+2x-3)senx\,dx$
5. $\int e^{x}\cos(x)\,dx$
6. $\int xln(x)\,dx$
7. $\int \ln(x)\,dx$
8. $\int xArctan(x)\,dx$
9. $\int 2xsen(6x-1)\,dx$
10. $\int xsen(x)\,dx$
11. $\int \sqrt{x}Ln(x)\,dx$
12. $\int \frac{x}{cos^{2}(x)}\,dx$
13. $\int (Ln(x))^{2}\,dx$
14. $\int sen(x)\cos(x)\,dx$
15. $\int x\sqrt{1+x}\,dx$
16. $\int sec^{3}(x)dx$
17. $\int xLn(3x)dx$
18. $\int sen^{2}(x)dx$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Racionales (Fracciones Parciales)

Para el uso de esta técnica es indispensable el manejo de los temas:
- División de polinomios.
- Factorización de polinomios
- Solución de sistemas de ecuaciones

Fracciones propias e impropias

Una función racional $P(x)/Q(x)$ es una ***fracción propia*** si el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado del polinomio $Q(x)$. En caso contrario, la fracción será denominada como ***fracción impropia***.

En caso de tener una fracción impropia, esta se puede escribir como la suma de un polinomio con una fracción propia efectuando la división de $P(x)$ entre $Q(x)$. Es decir:

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Racionales (Fracciones Parciales)

Caso 1. El denominador $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ es un producto de factores lineales distintos.	**Caso 2.** El denominador $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ es un producto de factores lineales repetidos.
$$(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)\cdots(a_kx+b_k)$$	$$(a_kx+b_k)^k$$
En este caso, existen constantes $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{k,}$ tales que la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es equivalente a:	En este caso, existen constantes $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{k,}$ tales que la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es equivalente a:
$$\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\frac{A_3}{a_3x+b_3}+\ldots+\frac{A_k}{a_kx+b_k}$$	$$\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{(a_2x+b_2)^2}+\frac{A_3}{(a_3x+b_3)^3}+\ldots+\frac{A_k}{(a_kx+b_k)^k}$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Racionales (Fracciones Parciales)

Caso 3. El denominador $\boldsymbol{Q(x)}$ es un producto de factores cuadráticos distintos. $$(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)$$ $$(a_3x^2+b_3+c_3)\ \cdots\ (a_kx^2+b_kx+c_k)$$ En este caso, existen constantes $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k,\ B_1, B_2, B_3, \ldots,$ B_k tales que la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es equivalente a: $$\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\frac{A_3x+B_3}{a_3x^2+b_3x+c_3}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{a_kx^2+b_kx+c_k}$$	**Caso 4.** El denominador $\boldsymbol{Q(x)}$ es un producto de factores cuadráticos repetidos. $$(a_kx^2+b_kx+c_k)^k$$ En este caso, existen constantes $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k,\ B_1, B_2, B_3, \ldots,$ B_k tales que la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es equivalente a: $$\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c}+\frac{A_2x+B_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2}+\frac{A_3x+B_3}{(a_3x^2+b_3x+c_3)^3}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{(a_kx^2+b_kx+c_k)^k}$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Racionales (Fracciones Parciales)

Ejemplo 15.

$$\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,dx$$

- La expresión a integrar, es una ***fracción propia***, debido a que el grado del numerador es menor que el grado del denominador. La factorización del denominador (x^3-2x^2-3x) es: $x(x-3)(x+1)$.

- Luego, la fracción dada se expresa como la suma de tres fracciones parciales con factores lineales distintos en el denominador:

$$\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1}$$

- El siguiente paso es determinar los valores de las constantes A, B y C:

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Racionales (Fracciones Parciales)

Ejemplo 15.

$$\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}dx$$

- Multiplicando por $x(x-3)(x+1)$ a cada término:

$$x(x-3)(x+1)\left[\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\right] = \left[\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+1}\right]x(x-3)(x+1)$$

$$5x+3 = A(x-3)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-3)$$

$$5x+3 = (A+B+C)x^2+(-2A+B-3C)x+(-3A)$$

- Igualando los coeficientes de la izquierda con los de la derecha, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+B+C & =0 \\ -2A+B-3C & =5 \\ -3A & =3 \end{cases}$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Racionales (Fracciones Parciales)

Ejemplo 15.

$$\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,dx$$

$$\begin{cases} A+B+C &= 0 \\ -2A+B-3C &= 5 \\ -3A &= 3 \end{cases}$$

- Cuya solución es: (Verificar).

$$\boldsymbol{A=-1,\ B=\frac{3}{2}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{C=-\frac{1}{2}}$$

- Volviendo a la integral, se tiene:

$$\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,dx = \int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+1}\right)dx$$

$$= \int\left(\frac{-1}{x}+\frac{3/2}{x-3}+\frac{-1/2}{x+1}\right)dx$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Racionales (Fracciones Parciales)

Ejemplo 15.

$$\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}dx \quad = \quad \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{3/2}{x-3} + \frac{-1/2}{x+1}\right)dx$$

$$= \quad -\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-3}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx$$

$$= \quad -Ln|x| + \frac{3}{2}Ln|x-3| - \frac{1}{2}Ln|x+1| + C$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Racionales (Fracciones Parciales)

Ejercicio 5.

$a. \int \frac{7x+3}{x^2+3x-4}dx$

b. $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

c. $\int \frac{5x^2-36x+48}{x(x-4)^2}dx$

d. $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$

e. $\int \frac{4x^2-8x+1}{x^3-x+6}dx$

f. $\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx$

$g. \int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}dx$

h. $\int \frac{8x^2+5x+18}{(4x^2+9)^2}dx$

i. $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Ejemplo 16.

Ejemplo 17.

Ejemplo 18.

Ejemplo 19.

Ejemplo 20.

Ejemplo 21.

Ejemplo 22.

Ejemplo 23.

Ejemplo 24.

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int \boldsymbol{sen^n(x)dx}$ $\boldsymbol{o} \int \boldsymbol{cos^n(x)dx}$

Se sugiere:

Si "n" es impar, usar:

$$\boldsymbol{sen^2(x) = 1 - cos^2(x)}$$

$$\boldsymbol{cos^2(x) = 1 - sen^2(x)}$$

Si "n" es par, usar:

$$\boldsymbol{sen^2(x) = \frac{1}{2}[1 - cos(2x)]}$$

$$\boldsymbol{cos^2(x) = \frac{1}{2}[1 + cos(2x)]}$$

Ejemplo 25.

$$\int cos^2(x) = \int \frac{1}{2}[1 + cos(2x)]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int 1dx + \int \cos(2x)\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{sen(2x)}{2}\right] + C$$

$$18. \int cos(ax)\, dx = \frac{sen(ax)}{a} + C$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int sen^n(x)dx$ o $\int cos^n(x)dx$

Ejemplo 26.

$$\int sen^3(x)dx = \int sen^2(x)sen(x)dx$$

$$= \int \left(1 - cos^2(x)\right)sen(x)dx$$

$$= \int sen(x)dx - \int cos^2(x)sen(x)dx$$

Si "n" es impar, usar:
$sen^2(x) = 1 - cos^2(x)$

7. $\int sen(x)\, dx = -cos(x) \ + C$

La primera integral (I1) es directa, de la tabla de integrales (7).
La segunda Integral (I2) se puede resolver por sustitución:

Para (I2):

$$\int cos^2(x)sen(x)dx = \int t^2(-dt)$$

$$= -\frac{t^3}{3} + C_1$$

$$= -\frac{cos^3(x)}{3} + C_1$$

De ahí que:

$$\int sen^3(x)dx = \int sen(x)dx - \int cos^2(x)sen(x)dx$$

$$= -cos(x) + \frac{cos^3(x)}{3} + \mathrm{C}$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int \boldsymbol{sen^n(x)dx}$ $\boldsymbol{o} \int \boldsymbol{cos^n(x)dx}$

Ejercicio 6.

a. $\int cos^4(x)\, dx$ b. $\int cos^2(3x)\, dx$ c. $\int cos^5(x)\, dx$

d. $\int sen^4(x)\, dx$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int \boldsymbol{sen(mx)cos(nx)dx}$, $\int \boldsymbol{sen(mx)sen(nx)dx}$ o $\int \boldsymbol{cos(mx)cos(nx)dx}$

Se sugiere:

1.	$sen(mx)sen(nx)$	$=$	$-\frac{1}{2}[cos(m+n)x - cos(m-n)x]$
2.	$\cos(mx)\cos(nx)$	$=$	$\frac{1}{2}[cos(m+n)x + cos(m-n)x]$
3.	$sen(mx)\cos(nx)$	$=$	$\frac{1}{2}[sen(m+n)x + sen(m-n)x]$
4.	$\cos(mx)sen(nx)$	$=$	$\frac{1}{2}[cos(m+n)x - sen(m-n)x]$

$sen(x)$ y $\cos(x)$
son funciones impar y par, respectivamente

$sen(-x) = -sen(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$

¿Qué es una función impar? ¿Qué es una función par? (consultar)

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int \boldsymbol{sen(mx)cos(nx)dx}$, $\int \boldsymbol{sen(mx)sen(nx)dx}$ o $\int \boldsymbol{cos(mx)cos(nx)dx}$

Ejemplo 27.

3.	$sen(mx)\cos(nx)$	$=$	$\frac{1}{2}[sen(m+n)x + sen(m-n)x]$

$$\int sen(2x)cos(3x)dx = \int \frac{1}{2}[sen(2+3)x + sen(2-3)x]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int sen(5x)dx + \int sen(-x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int sen(5x)dx - \int sen(x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(5x)}{5} + \cos(x)\right] + C$$

$$\boxed{sen(-x) = -sen(x)}$$

$$\boxed{17. \int sen(ax)\,dx = -\frac{cos(ax)}{a} + C}$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int \boldsymbol{sen(mx)cos(nx)dx}$, $\int \boldsymbol{sen(mx)sen(nx)dx}$ $\boldsymbol{o}$ $\int \boldsymbol{cos(mx)cos(nx)dx}$

Ejercicio 7.

a. $\int sen(5x)\cos(4x)\,dx$ b. $\int sen(x)sen(2x)sen(3x)\,dx$ c. $\int \cos(6x)\cos(3x)\,dx$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int \boldsymbol{tan^n(x)dx}$ o $\int \boldsymbol{cot^n(x)dx}$

Se sugiere:

$$\boxed{\begin{array}{l} tan^2(x) = sec^2(x) - 1 \\ cot^2(x) = csc^2(x) - 1 \end{array}}$$

Ejemplo 28.

$$\int tan^3(x)\,dx = \int tan^2(x)\tan(x)\,dx$$

$$= \int (sec^2(x) - 1)\tan(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\int sec^2(x)\tan(x)\,dx}_{\text{I1}} - \underbrace{\int \tan(x)\,dx}_{\text{I2}}$$

$$\boxed{9. \int \boldsymbol{tan(x)\,dx = -Ln|cos(x)| + C}}$$

La primera integral (I1) se resuelve por sustitución.
La segunda integral (I2) se resuelve directamente usando la tabla de integrales (9):

$$\int tan^3(x)\,dx = \int sec^2(x)\tan(x)\,dx - \int \tan(x)\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} t = \tan(x) \\ dt = sec^2(x)dx \end{array}} \quad = \int tdt - \int \tan(x)\,dx$$

$$= \frac{t^2}{2} - (-Ln|\cos(x)|) + C$$

$$= \frac{\tan^2(x)}{2} + Ln|\cos(x)| + C$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int \boldsymbol{tan^n(x)dx}$ $\boldsymbol{o}$ $\int \boldsymbol{cot^n(x)dx}$

Ejercicio 8.

a. $\int tan^5(x)\,dx$ b. $\int cot^4(x)\,dx$ c. $\int tan^4(x)\,dx$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int \tan^m(x)\sec^n(x)dx$ o $\int \cot^m(x)\csc^n(x)dx$

Caso 1. Si el exponente de la secante o cosecante n es **par** se reescribe de tal manera que encuentre la derivada de la tangente o cotangente según corresponda.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x)} \qquad \boxed{\frac{d}{dx}\cot(x) = -\csc^2(x)}$$

Ejemplo 29.

$$\int \tan^{-\frac{3}{2}}(x)\sec^4(x)\,dx$$

$$= \int \tan^{-\frac{3}{2}}(x)\sec^2(x)\sec^2(x)\,dx$$

$$= \int \tan^{-\frac{3}{2}}(x)\sec^2(x)(\tan^2(x)+1)dx$$

$$= \int \tan^{\frac{1}{2}}(x)\sec^2(x)\,dx + \int \tan^{-\frac{3}{2}}(x)\sec^2(x)\,dx$$

Las dos integrales se resuelven por sustitución:

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int tan^m(x)sec^n(x)dx$ o $\int cot^m(x)csc^n(x)dx$

Ejemplo 29.

$$\int tan^{-\frac{3}{2}}(x)sec^4(x)\,dx = \int tan^{\frac{1}{2}}(x)sec^2(x)\,dx + \int tan^{-\frac{3}{2}}(x)sec^2(x)\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} t = tan(x) \\ dt = sec^2(x)dx \end{array}}$$

$$= \int t^{\frac{1}{2}}\,dt + \int t^{-\frac{3}{2}}\,dt$$

$$= \frac{t^{3/2}}{3/2} + \frac{t^{-1/2}}{-1/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}t^{3/2} - 2t^{-1/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}tan^{3/2}(x) - 2tan^{-1/2}(x) + C$$

Las dos integrales se resuelven por sustitución:

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int tan^m(x)sec^n(x)dx$ o $\int cot^m(x)csc^n(x)dx$

Ejercicio 9.

a. $\int tan^2(x)sec^2(x)\,dx$ b. $\int cot^2(x)csc^4(x)\,dx$

Las dos integrales se resuelven por sustitución:

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int \boldsymbol{tan^m(x)sec^n(x)dx}$ o $\int \boldsymbol{cot^m(x)csc^n(x)dx}$

Caso 2. Si el exponente de la tangente o cotangente $\boldsymbol{m}$ es impar se reescribe de tal manera que encuentre la derivada de la secante o cosecante según corresponda.

$$\boxed{\frac{d}{dx}sec(x) = sec(x)\,tan(x)}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}csc(x) = -\,csc(x)\,cot(x)}$$

Ejemplo 30.

$$\begin{aligned}\int tan^3(x)sec^{-\frac{1}{2}}(x)dx &= \int tan^2(x)sec^{-\frac{3}{2}}(x)\,sec(x)\,tan(x)dx\\ &= \int (sec^2(x)-1)sec^{-\frac{3}{2}}(x)\,sec(x)\,tan(x)dx\\ &= \int sec^{\frac{1}{2}}(x)\,sec(x)\,tan(x)dx - \int sec^{-\frac{3}{2}}(x)\,sec(x)\,tan(x)dx\end{aligned}$$

Las dos integrales se resuelven por sustitución:

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int \boldsymbol{tan^m(x)sec^n(x)dx}$ $\boldsymbol{o}$ $\int \boldsymbol{cot^m(x)csc^n(x)dx}$

Caso 2. Si el exponente de la tangente o cotangente $\boldsymbol{m}$ es impar se reescribe de tal manera que encuentre la derivada de la secante o cosecante según corresponda.

Ejemplo 30.

$$\int tan^3(x)sec^{-\frac{1}{2}}(x)dx = \int sec^{\frac{1}{2}}(x)\,sec(x)\,tan(x)dx - \int sec^{-\frac{3}{2}}(x)\,sec(x)\,tan(x)dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} t = sec(x) \\ dt = sec(x)\,tan(x)\,dx \end{array}}$$

$$= \int t^{\frac{1}{2}}dt - \int t^{-\frac{3}{2}}dt$$

$$= \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}sec^{\frac{3}{2}}(x) + 2sec^{-\frac{1}{2}}(x) + C$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales de la forma $\int \boldsymbol{tan^m(x)sec^n(x)dx}$ o $\int \boldsymbol{cot^m(x)csc^n(x)dx}$

Ejercicio 10.

a. $\int tan^5(x)sec(x)\,dx$ b. $\int tan^3(x)sec^{-1/2}(x)\,dx$ c. $\int cot^3(x)\csc(x)\,dx$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales por sustitución trigonométrica

Para el uso de esta técnica es indispensable el manejo de los temas:
- Solución de ecuaciones trigonométricas.
- Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.
- Teorema de Pitágoras.

Estos temas deben ser de su entero dominio. Si no es así, es su deber consultar.

	Se tiene	Sustituir por	Obtener
1	$\sqrt{a^2 - b^2x^2}$	$x = \frac{a}{b} sen(t)$	$\sqrt{1 - sen^2(t)}$
2	$\sqrt{a^2 + b^2x^2}$	$x = \frac{a}{b} tan(t)$	$\sqrt{1 + tan^2(t)}$
3	$\sqrt{b^2x^2 - a^2}$	$x = \frac{a}{b} sec(t)$	$\sqrt{sec^2(t) - 1}$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales por sustitución trigonométrica

Ejemplo 31.

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{4-(2sen(t))^2}}{(2sen(t))^2} 2\cos(t)\,dt$$

$$a = 2, b = 1$$
$$\boldsymbol{x = 2sen(t)}$$
$$dx = 2\cos(t)\,dt$$

$$= \int \frac{\sqrt{4-4sen^2(t)}}{4sen^2(t)} 2\cos(t)\,dt$$

$$= \int \frac{\sqrt{4(1-sen^2(t))}}{2sen^2(t)} \cos(t)\,dt$$

$$= \int \frac{\sqrt{4}\sqrt{1-sen^2(t)}}{2sen^2(t)} \cos(t)\,dt$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-sen^2(t)}}{sen^2(t)} \cos(t)\,dt$$

1	$\sqrt{a^2-b^2x^2}$	$x = \frac{a}{b}sen(t)$	$\sqrt{1-sen^2t}$

$$= \int \frac{\sqrt{1-sen^2(t)}}{sen^2(t)} \cos(t)\,dt$$

$$= \int \frac{\sqrt{cos^2(t)}}{sen^2(t)} \cos(t)\,dt$$

$$= \int \frac{\cos(t)}{sen^2(t)} \cos(t)\,dt$$

$$= \int \frac{cos^2(t)}{sen^2(t)} dt$$

$$= \int cot^2(t)dt$$

$$= \int (csc^2(t)-1)dt$$

$$= \int csc^2(t)dt - \int dt$$

$$= -cot(t) - t + C$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales por sustitución trigonométrica

Ejemplo 31.

Regresando a la variable original:

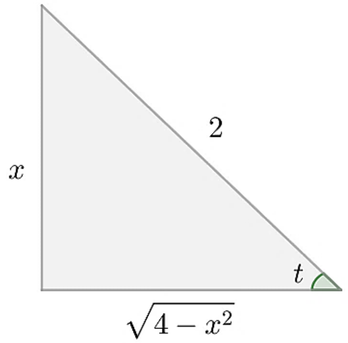
Dado que:

$$x = 2sen(t)$$

Entonces:

$$\boldsymbol{sen(t) = \frac{x}{2}} \qquad \textbf{(1)}$$

De **(1)** completamos el siguiente triángulo rectángulo:



$$\boxed{cot(t) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}}$$

$$\boxed{t = Arcsen\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\boxed{sen(t) = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa}}$$

$$\boxed{cot(t) = \frac{Cateto\ Adyacente}{Cateto\ Opuesto}}$$

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx = -cot(t) - t + C$$

$$= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - Arcsen\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integrales por sustitución trigonométrica

Ejercicio 11.

a. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}\,dx$

b. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$

c. $\int \frac{x^3}{(x^2+9)^{3/2}}\,dx$

d. $\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^3}\,dx$

e. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{3+x^2}}\,dx$

f. $\int \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integración de funciones racionales trigonométricas (Sustitución Universal)

Caso 1. Integrales del tipo

$$\int R(sen(x), \cos(x))$$

Se sugiere:

$$t = tan\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \text{donde:} \qquad sen(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Ejemplo 32.

$$\int \frac{1}{1+sen(x)+\cos(x)}dx = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\left(\frac{2}{1+t^2}dt\right)$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}}\left(\frac{2}{1+t^2}dt\right)$$

$$= \int \frac{2}{2t+2}dt$$

$$= \int \frac{2}{2(t+1)}dt$$

$$= \int \frac{1}{t+1}dt$$

$$= Ln|t+1| + C$$

$$= Ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right| + C$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integración de funciones racionales trigonométricas (Sustitución Universal)

Caso 1. Integrales del tipo

$$\int R(sen(x), \cos(x))$$

Ejercicio 12.

a. $\int \frac{1}{4sen(x)+1} dx$ b. $\int \frac{1}{3sen(x)+4\cos(x)} dx$ c. $\int \frac{\tan(x)}{1+sen(x)} dx$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integración de funciones racionales trigonométricas (Sustitución Universal)

Caso 2. Integrales del tipo

$$\int R(-sen(x), -\cos(x)) = \int R(sen(x), \cos(x))$$

Se sugiere:

$$t = tan(x) \qquad \text{donde:} \qquad sen(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

Ejemplo 33.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+sen^2(x)}dx &= \int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}\left(\frac{1}{1+t^2}dt\right) \\
&= \int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\left(\frac{1}{1+t^2}dt\right) \\
&= \int \frac{1}{\frac{1+t^2+t^2}{1+t^2}}\left(\frac{1}{1+t^2}dt\right) \\
&= \int \frac{1}{1+2t^2}dt \\
&= \int \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}t\right)^2}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}Arctan\left(\sqrt{2}t\right)+C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}Arctan\left(\sqrt{2}\tan(x)\right)+C
\end{aligned}$$

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de Funciones Trigonométricas

Integración de funciones racionales trigonométricas (Sustitución Universal)

Caso 2. Integrales del tipo

$$\int R(-sen(x), -\cos(x)) = \int R(sen(x), \cos(x))$$

Ejercicio 13.

a. $\int \frac{1}{1+sen^2(x)}dx$ b. $\int \frac{sen^2(x)}{1+sen^2(x)}dx$ c. $\int \frac{1}{1+cos^2(x)}dx$