Capítulo 3
ECUACIONES

www.mathspace.jimdo.com

Todas las guías de clase deben ser estudiadas previamente

Una ecuación es una igualdad donde por lo menos hay un número desconocido, llamado incógnita o variable, y que se cumple para determinado valor numérico de dicha incógnita. Resolver la ecuación consiste en encontrar un valor (o varios) que, al sustituirlo por la incógnita, haga que sea cierta la igualdad, ese valor es la ***solución*** de la ecuación.

3.1. Ecuaciones en una variable

3.1.1. Solución de ecuaciones de primer grado o lineales

Se denominan **ecuaciones lineales** o de **primer grado** a las igualdades algebraicas con incógnitas cuyo exponente es 1 (que no se escribe).

$$ax + b = 0$$

Como procedimiento general para resolver ecuaciones enteras de primer grado se deben seguir los siguientes pasos:

1. Se reducen los términos semejantes, cuando es posible.

2. Se hace la transposición de términos, los que contengan la incógnita se ubican en el lado izquierdo, y los que carezcan de ella en el derecho.

3. Se despeja la incógnita y se simplifica.

Ejemplo 1:

$$5(x-3)-(x-1)=(x+3)-10$$

$$5x-15-x+1=x+3-10 \qquad \textit{(Propiedad distributiva)}$$

$$5x-x-x=3-10+15-1 \qquad \textit{(Agrupando términos semejantes)}$$

$$3x=7$$

$$x=\frac{7}{3}$$

3.1.2. Solución de ecuaciones de segundo grado o cuadráticas

Si en la ecuación la incógnita está elevada al cuadrado, decimos que es una **ecuación de segundo grado (llamada también ecuación cuadrática)**, que se caracteriza porque puede tener a lo más **dos soluciones** (aunque también una sola, e incluso ninguna solución en los números reales). Cualquier ecuación de segundo grado o cuadrática se puede expresar de la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Ejemplo 2:

$9x^2 + 6x + 10 = 0$	$a = 9,\ b = 6,\ c = 10$
$3x^2 - 9x = 0$	$a = 3,\ b = -9,\ c = 0$
$-6x^2 + 10 = 0$	$a = -6,\ b = 0,\ c = 10$

Para resolver la ecuación cuadrática de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, puede usarse cualquiera de los tres métodos siguientes:

a. Solución por factorización

Al factorizar la ecuación cuadrática se obtiene el producto de binomios, se debe buscar el valor de $\boldsymbol{x}$ de cada uno. Para hacerlo se iguala a cero cada factor y se despeja para la variable.

Ejemplo 3:

$(x + 3)(2x - 1) = 9$

Lo primero es igualar la ecuación a cero.

Para hacerlo, se multiplican los binomios:

$2x^2 + 5x - 3 = 9$

Ahora, se pasa el 9, con signo contrario, al lado izquierdo para igualar a cero:

$2x^2 + 5x - 12 = 0$

Ahora se factoriza:

$(2x - 3)(x + 4) = 0$

Se iguala a cero cada término del producto para resolver las incógnitas:

Si $2x - 3 = 0$ $x = 3/2$	**Si** $x + 4 = 0$ $x = -4$

b. Solución completando cuadrados

En este método, en la ecuación cuadrática se pueden realizar operaciones algebraicas que transforman a una ecuación del tipo:

$$(ax + b)^2 = n$$

Ejemplo 4:

La ecuación $x^2 + 8x = 48$, también puede escribirse como: $x^2 + 8x - 48 = 0$

Al primer miembro de la ecuación **(**$x^2 + 8x$**)** le falta un término para completar el **cuadrado de la suma de un binomio** del tipo $(ax + b)^2 = (ax + b)(ax + b)$, que es lo mismo que $ax^2 + 2axb + b^2$.

En este caso $x^2 + 8x = 48$, el **8** representa al doble del segundo número del binomio, por lo tanto, ese número debe ser forzosamente 8 dividido entre 2, es decir 8/2 = 4, y como en el cuadrado de la suma de un binomio **(** $a^2 + 2ab + b^2$**)** el tercer término corresponde al cuadrado del segundo término **(**$4^2 = 16$**)** amplificamos ambos miembros de la ecuación por 16, así se tiene:

$$x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 48 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 8x + 16 = 48 + 16$$

$$x^2 + 8x + 16 = 64$$

$$(x + 4)(x + 4) = 64$$

$$(x + 4)^2 = 64$$

$$\sqrt{(x + 4)^2} = \sqrt{64}$$

$$x + 4 = 8$$

$$x = 8 - 4$$

$$x = 4$$

Se dice que **"se completó un cuadrado"** porque para el primer término de la ecuación se logró obtener la expresión $(x + 4)^2$, que es el cuadrado perfecto de un binomio.

a. Solución por fórmula general

Existe una expresión que permite resolver cualquier ecuación de segundo grado, que es la siguiente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 5:

Resolver la ecuación $2x^2 + 3x - 5 = 0$

$a = 2,\quad b = 3$ y $c = -5$, así es que:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

De ahí que:

$x_1 = \frac{-3+7}{4} = 1$ y $x_2 = \frac{-3-7}{4} = \frac{-5}{2}$

Se debe tener en cuenta:

En la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado aparece la expresión $\sqrt{b^2 - 4ac}$. Esa raíz cuadrada sólo existirá cuando el radicando ($b^2 - 4ac$) sea positivo o cero.

El radicando $b^2 - 4ac$ se denomina **discriminante** y se simboliza por **Δ (Delta)**. El número de soluciones **(llamadas también raíces)** depende del signo de **Δ** y se puede determinar incluso antes de resolver la ecuación.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Estudiando el signo del discriminante, se puede saber el número de soluciones que posee:

- Si Δ es positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales.
- Si Δ es negativo, la ecuación no tiene solución real.
- Si Δ es cero, la ecuación tiene una única solución real.

En el ejemplo anterior el discriminante era **Δ = 49**, positivo, por eso la ecuación tiene dos soluciones.

3.1.3. Solución de ecuaciones racionales

Las ecuaciones racionales son ecuaciones de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. $Q(x) \neq 0$

Para resolver ecuaciones racionales se pasan todos los términos de un lado, y que del otro quede 0 ("igualar a cero"). Luego se busca denominador común, se transforman los numeradores como en la suma de fracciones, y se puede cancelar el denominador común.

Ejemplo 6:

$$\frac{x^2-32}{4}+\frac{28}{x^2-9}=0 \Leftrightarrow \frac{x^4-41x^2+400}{4(x^2-9)}=0 \Leftrightarrow x^4-41x^2+400=0 \ \wedge \ x^2-9\neq 0$$

$$x^2=\frac{41\pm\sqrt{41^2-4\cdot 1\cdot 400}}{2}=\frac{41\pm 9}{2}\begin{cases} x^2=16 \begin{cases} x=4 \\ x=-4 \end{cases} \\ x^2=25 \begin{cases} x=5 \\ x=-5 \end{cases} \end{cases}$$

Note que:

$$x^4-41x^2+400$$

Se puede escribir como:

$$(x^2)^2-41x^2+400$$

Por tal razón, se usa la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

Existen 4 soluciones reales: $x_1=4$, $x_2=-4$, $x_3=5$, $x_4=-5$.

Ejemplo 7:

$\frac{3}{x}-\frac{x^2+3}{x}=x^3$

$\frac{-x^2}{x}=x^3$ {Operando}

$-x=x^3$ {Simplificando}

$x^3+x=0 \ con \ x\neq 0$ {Igualando a cero}

$x(x^2+1)=0 \ con \ x\neq 0$ {Factorizando x}

La ecuación $x(x^2+1)=0$ tiene una solución real y dos complejas:

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2=-1 \Leftrightarrow x=\pm i \end{cases};$$

(**Tenga en cuenta que:** $\sqrt{-1}=\pm i$)

Como debe cumplirse $x\neq 0$, la ecuación dada tiene dos soluciones complejas, $x_1=i$, $x_2=-i$, y no tiene soluciones reales.

3.1.4. Solución de ecuaciones con radicales

Una **ecuación radical** es una ecuación en la cual la variable aparece dentro del signo radical.

Ejemplo:

$$2\sqrt{x}=9; \quad \sqrt{x+5}=3.$$

Para resolver ecuaciones con radicales se usa la propiedad que está a continuación, la cual permite elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación.

Propiedad: Para cualquier número ***a*** y ***b*,** si ***a = b*** entonces, $\boldsymbol{a^2 = b^2}$. Esto es, si dos cantidades son iguales, entonces, el cuadrado de estas cantidades son iguales.

Para resolver ecuaciones con radicales:

1. Reescribir la ecuación de manera que la expresión radical esté a un lado de la ecuación.
2. Elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación.
3. Resolver la ecuación.

Nota: Para resolver ecuaciones con radicales que contienen raíces más elevadas, se debe elevar ambos lados de la ecuación al exponente correspondiente. Por ejemplo, para resolver ecuaciones con radicales que contienen una raíz cúbica se debe elevar ambos lados de la ecuación al exponente tres.

Ejemplo 8:

$\sqrt{x^2 - 13} + x - 13 = 0$

$\sqrt{x^2 - 13} = 13 - x$

$\sqrt{x^2 - 13}^2 = (13 - x)^2$ {Elevando al cuadrado}

$x^2 - 13 = 169 - 26x + x^2$ {Desarrollando el binomio al cuadrado}

$26x = 13 + 169$

$x = 7$

Ejemplo 9:

$\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$

$\sqrt{3x + 1} = 1 + \sqrt{2x - 1}$

$\sqrt{3x + 1}^2 = (1 + \sqrt{2x - 1})^2$ {Elevando al cuadrado}

$3x + 1 = 1 + 2\sqrt{2x - 1} + (2x - 1)$ {Desarrollando el binomio al cuadrado}

$3x - 2x + 1 = 2\sqrt{2x - 1}$

$\frac{x+1}{2} = \sqrt{2x - 1}$

$\frac{(x+1)^2}{2^2} = (\sqrt{2x - 1})^2$ {Elevando al cuadrado}

$x^2 + 2x + 1 = 8x - 4$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$x = 1$ y $x = 5$ son soluciones de la ecuación dada.

3.1.4. Solución de ecuaciones con valores absolutos

El valor absoluto se define como la distancia que hay entre un número y su origen. En general, para resolver una ecuación con valor absoluto debemos buscar aquellos valores que satisfagan la expresión $|x| = k$ utilizando la siguiente información: $|x| = k$ es equivalente a: $x = k$ ó $x = -k$.

Ejemplo 10:

Encuentre la solución para $|2x - 3| = x + 5$.

Se deben resolver los siguientes casos:

Caso 1:

$$\begin{gathered} 2x - 3 = x + 5 \\ 2x - x = 5 + 3 \\ x = 8 \end{gathered}$$

Caso 2:

$$\begin{gathered} 2x - 3 = -(x + 5) \\ 2x - 3 = -x - 5 \\ 2x + x = -5 + 3 \\ 3x = -2 \\ x = \frac{-2}{3} \end{gathered}$$

Ejemplo 11:

Encuentre la solución para $\frac{3}{5}|6x + 1| = -6$.

$|6x + 1| = -6 \cdot \frac{5}{3}$ {Pasando $\frac{3}{5}$ al otro lado}

$|6x + 1| = -10$

El resultado de un valor absoluto no puede ser negativo. Por lo tanto, la ecuación no tiene solución.

3.1.6. Solución de ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que las incógnitas forman parte de un exponente.

Ejemplo 12: Calcular x en la ecuación $2^x = 128$.

Se puede transformar en: $2^x = 2^7$ de donde se obtiene que $x = 7$.

En general:

si $a^x = a^y \Rightarrow x = y$
si $a^x = b^x \Rightarrow a = b$

Ejemplo 13: Resolver la ecuación exponencial: $27^{x-1} = \sqrt[3]{9}$

$27^{x-1} = \sqrt[3]{9}$

$(3^3)^{x-1} = (3^2)^{\frac{1}{3}}$

$(3)^{3x-3} = (3)^{\frac{2}{3}}$

De ahí que:

$3x - 3 = \frac{2}{3}$

$x = \frac{11}{9}$

Ejemplo 14: $1024 = (8)2^x$	***Ejemplo 15***: $3^x + 3^{x+2} = \frac{10}{3}$	***Ejemplo 16***: $\sqrt{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4} = 25^{3x}$
$1024 = (8)2^x$	$3^x + 3^{x+2} = \frac{10}{3}$	$\sqrt{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4} = 25^{3x}$
$2^{10} = 2^3 2^x$	$3^x + 3^x 3^2 = \frac{10}{3}$	$5^{\frac{1}{2}}\left(5^{-1}\right)^{2x-4} = \left(5^2\right)^{3x}$
$2^{10} = 2^{3+x}$	$3^x\left(1+3^2\right) = \frac{10}{3}$	$5^{\frac{1}{2}-2x+4} = 5^{6x}$
$10 = 3 + x$	$3^x(10) = \frac{10}{3}$	$\frac{1}{2} - 2x + 4 = 6x$

x = 7	$3^x = \frac{10}{3(10)}$	$\frac{9}{2} = 8x$
	$3^x = \frac{10}{3(10)}$	$\frac{9}{16} = x$
	$3^x = \frac{1}{3}$	
	x = –1	

3.1.7. Solución de ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que aparece la incógnita o incógnitas en un logaritmo.

Se debe tener presente que:

- Siempre que sea posible, conviene agrupar los logaritmos en uno solo, para lo cual se aplican las propiedades de los logaritmos.
- Para despejar una incógnita contenida en el argumento, se aplica la definición de logaritmo.
- Sólo existen logaritmos de números positivos, por lo cual deben descartarse como soluciones los valores que no verifiquen la ecuación original.

Ejemplo 17: Resolver la ecuación $log(x + 6) = log(2x - 1)$.

Parece lógico que para que esta ecuación sea cierta, debe ser: $x + 6 = 2x - 1$, es decir: $x = 7$.

El método para resolver numéricamente las ecuaciones logarítmicas se basa en lo siguiente:

Conseguir una ecuación del tipo $log(...) = log(...)$, para ello se deben tener muy claras las propiedades de los logaritmos y la definición.

Definición: $$log_b(a) = c \Leftrightarrow b^c = a$$	Propiedades: 1. $log(xy) = log(x) + log(y)$ 2. $log\left(\frac{x}{y}\right) = log(x) - log(y)$ 3. $log(x^y) = ylog(x)$

Ejemplo 18: Determinar el valor de x en la ecuación $log(x + 6) = 1 + log(x - 3)$.

$log(x + 6) = 1 + log(x - 3)$;

$log(x + 6) = log\,10 + log(x - 3)$;

$log(x + 6) = log\,(10(x - 3))$.

$x + 6 = 10(x - 3)$

$x = 4$.

Ejemplo 19: Resolver la ecuación $log\,(3 - x^2) = log\,2 + log\,x$

$log\,(3 - x^2) = log\,(2x)$,

$3 - x^2 = 2x$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$x_1 = 1$ y $x_2 = - 3$

Al sustituir el valor -3 en la ecuación inicial, se obtiene que $log(- 6) = log2 + log\,(- 3)$, pero los *¡logaritmos de números negativos que no existen!*. Por tanto la única solución de esta ecuación es ***x = 1***.

Ejemplo 20: $log_2(x + 1) = 3$	***Ejemplo 21***: $log_2(x + 7) - log_2(x + 1) = 4$	***Ejemplo 22***: $2log_5 x + log_5(8x) = 3$
$2^3 = x+1$	$\log_2 \frac{x+7}{x+1} = 4$	$log_5 x^2 + log_5(8x) = 3$
$2^3 - 1 = x$	$2^4 = \frac{x+7}{x+1}$	$log_5(x^2(8x)) = 3$
$x=7$	$2^4\,(x+1) = x+7$	$log_5(8x^3) = 3$
	$16\,x + 16 = x + 7$	$5^3 = 8x^3$
	$15\,x = -9$	$\frac{5^3}{8} = x^3$
	$x = -3/5$	$x=2.5$

Observación: Debe verificar si los resultados obtenidos anteriormente efectivamente son soluciones para sus respectivas ecuaciones.

3.2. Ecuaciones en dos variables

Un sistema de dos ecuaciones con dos variables (incógnitas) son dos ecuaciones de las que se busca una solución común.

Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables.

Resolver el sistema de ecuaciones simultáneas es hallar el valor de cada variable; y se necesitan tantas ecuaciones como número de incógnitas haya, por ejemplo, si hay dos incógnitas se necesitan dos ecuaciones.

A continuación se presentan algunos métodos de solución:

1. Eliminación: Se elige una incógnita y se busca que tenga el mismo coeficiente pero signo diferente para poder eliminarlas, posteriormente se suma y se obtiene el valor de una incógnita y con este valor se encuentra la incógnita faltante.

2. Sustitución: Se elige una incógnita en una ecuación y se despeja, después se sustituye en la otra ecuación.

3. Igualación: Se despeja una misma incógnita en ambas ecuaciones y después se igualan.

4. Solución gráfica: Se grafican ambas ecuaciones y el punto de intersección (donde se cruzan) es la solución.

1. Eliminación

Ejemplo 26:

$$3x + 5y = 7$$
$$2x - y = -4$$

$3x + 5y = 7$
$10x - 5y = -20$

{Se puede elegir cualquier incógnita, en este caso elegimos "*y*" pues esta incógnita ya tiene los signos contrarios, solo se multiplica por 5 toda la segunda ecuación}

$13x = -13$
$x = -13/13$
$x = -1$

{Se elimina "*y*" y se operan los demás términos}

$3x + 5y = 7$

{Este valor se sustituye en cualquiera de las dos primeras ecuaciones}

$3(-1) + 5y = 7$
$-3 + 5y = 7$
$5y = 7 + 3$
$5y = 10$
$y = 10/5$
$y = 2$

Luego, la solución del sistema es *x=-1* e *y=2.*

2. Sustitución

Ejemplo 27:

$10x + 18y =- 11$

$16x - 9y =- 5$

$x = \frac{-11-18y}{10}$ {Despejamos "*x*" en la primera ecuación}

$16\left(\frac{-11-18y}{10}\right) - 9y =- 5$ {Sustituimos "*x*" en la segunda ecuación}

$- 88 - 144y - 45y =- 25$ {Simplificando y destruyendo paréntesis}

-189y=63

$y = \frac{-1}{3}$ {Reduciendo términos semejantes}

$10x + 18\left(\frac{-1}{3}\right) =- 11$ {Sustituyendo el valor de "*y*" en la primera ecuación}

$x = \frac{-1}{2}$ {Destruyendo paréntesis y simplificando}

Luego, la solución del sistema es $x = \frac{-1}{2}$ e $y = \frac{-1}{3}$.

3. Igualación

Ejemplo 28:

$3x + 2y = 11$

$5x + 2y = 21$

$y = \frac{-3x+11}{2}$ {Despejamos "*y*" en las dos ecuaciones (puede ser también "*x*")}

$y = \frac{-5x+21}{2}$

$\frac{-3x+11}{2} = \frac{-5x+21}{2}$ {Igualamos las dos ecuaciones}.

$2x = 10$ {Operando y simplificando}

$x = 5$

Para hallar la solución en *"y"* sustituimos éste valor en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema equivalente, y así:

$y = -2$

Luego, la solución del sistema es $x = 5$ e $y = -2$.

4. Solución gráfica:

En toda igualdad de la forma $ax + by = c$, donde $a, b, c \in R$, que representa a una ecuación lineal con dos incógnitas, las soluciones son pares ordenados de la forma *(x,y)*.

A toda ecuación lineal (de primer grado) con dos incógnitas le corresponde gráficamente una recta. Cada par ordenado de números *(x,y)* que satisface esta ecuación, corresponde a las coordenadas de un punto de la recta correspondiente. Estos pares ordenados son solución de la ecuación, y los puntos que ellos representan pertenecen a la recta correspondiente.

La representación de los pares ordenados *(x,y)* corresponde a un punto en el plano cartesiano, por ejemplo, en la ecuación :

$$x + y = 4$$

Tabla de valores:

x	*y*
-1	5
0	4
1	3
2	2

Instrucciones en Geogebra para realizar el gráfico:

Nota: *Cada instrucción debe estar seguida de la tecla ENTER.*

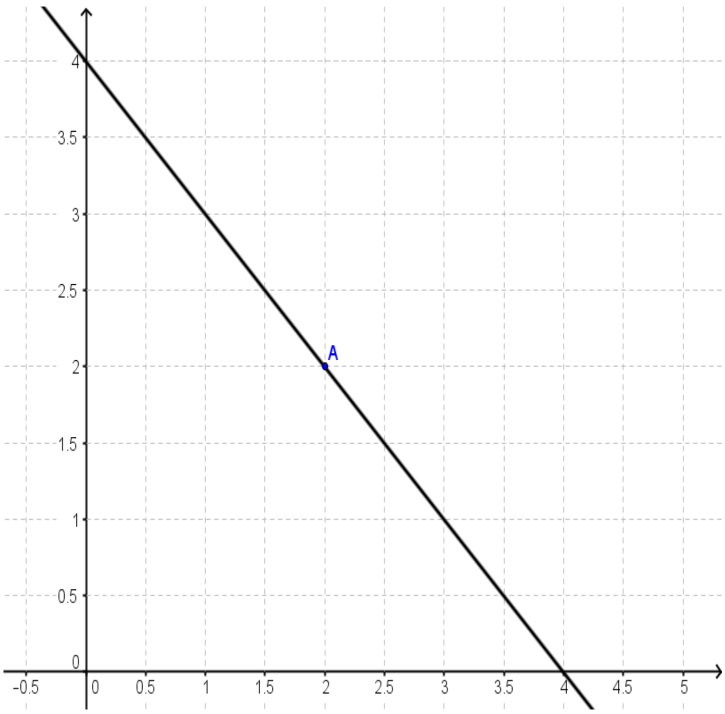
En el campo de entrada escribe:

x+y=4

Posteriormente:

A=(2,2)

Gráfico:



Recuerde que para trazar una línea recta son suficientes dos puntos, preferiblemente cuando se trata de representaciones gráficas en un plano cartesiano es conveniente identificar puntos de corte (intersecciones) con los ejes coordenados. Esto es:

- Corte con el *EjeX*, es cuando *y* se hace igual a cero.
- Corte con el *EjeY*, es cuando *x* se hace igual a cero.

Ejercicio: Determinar estos puntos de corte con los ejes coordenados en la representación gráfica de la ecuación $\boldsymbol{x + y = 4}$.

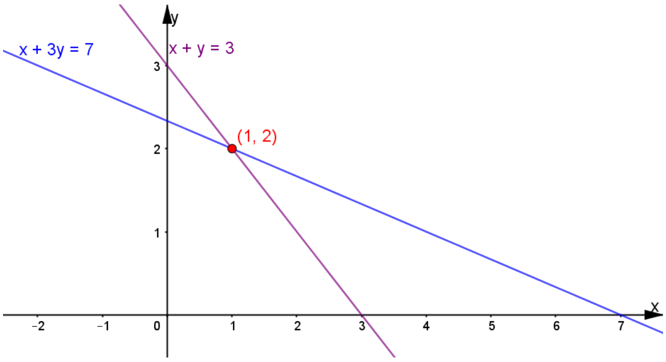
Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

Ejemplo 29: Consideremos el sistema

$$x + 3y = 7$$
$$x + y = 3$$

Interceptos para cada ecuación:

$a : x + 3y = 7$ $\qquad$ $b:\ x + y = 3$



Así, la solución del sistema es el par ordenado **(1,2)**.

¿Qué sucede si las rectas resultan ser paralelas? ¿Y si son coincidentes?

Los sistemas que tienen solución se llaman **compatibles**. Si la solución es única se llaman **compatibles determinados**. Si tienen infinitas soluciones se llaman **compatibles indeterminados**. Si un sistema carece de soluciones se dice que es **incompatible**.

Ejemplo 30: El sistema:

$$30x - 20y = 130$$
$$3x - 2y = 13$$

La segunda ecuación se multiplica por el valor de 10:

$$10(3x - 2y) = 10 \cdot 13$$

Con lo que se obtiene la primera ecuación:

$30x - 20y = 130$

Así que el sistema es equivalente en realidad, a una sola ecuación lineal con dos incógnitas que, como ya sabemos, tiene infinitas soluciones; en este caso: (3, 22), (1, 25), (5, 1)… Por lo tanto, el sistema es ***compatible indeterminado.***

Sin embargo, el sistema

$14x - 40y = 0$

$7x - 20y = 10$

La primera ecuación se multiplica por el valor de 1/2:

$7x - 20y = 0$

Así que el sistema quedaría:

$7x - 20y = 0$

$7x - 20y = 10$

Lo cual es ***incompatible***, pues no se puede verificar que $7x - 20y$ sea a la vez igual a 0 y a 10.

Así pues, los sistemas lineales se pueden clasificar según las soluciones que tengan en: