Cálculo 1
Taller N° 1
Límites y Continuidad
mathspace.jimdo.@gmail.com

1. Realice una tabla con el cálculo de $f(x)$ en los valores de x dados con el fin de estimar, si existe el límite de $f(x)$ en el punto p enunciado.

   a) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$, $x = 0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ 1.001,\ 1.01,\ 1.1$, $p = 1$.

   b) $f(x) = \frac{x-2}{x-2}$, $x = 1.9,\ 1.99,\ 0.999,\ 2.001,\ 2.01,\ 2.1$, $p = 2$.

   c) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$, $x = 0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ 1.001,\ 1.01,\ 1.1$, $p = 1$.

2. Utilice la gráfica de la función f y evalúe $\lim\limits_{x\to p} f(x)$, si éstos existen para los valores dados de p.

   a)
   $$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad (p = 0)$$

   b)
   $$f(x) = \begin{cases} -2x+4 & \text{si} \quad x < 1 \\ 4 & \text{si} \quad x = 1 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \qquad (p = 1)$$

   c)
   $$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad (p = 0)$$

   d)
   $$f(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases} \qquad (p = 1)$$

3. Encuentre el límite indicado, dado que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x\to p} g(x) = 4$.

   a) $\lim\limits_{x\to p} \left(\sqrt{g(x)}\right)$

   b) $\lim\limits_{x\to p} \sqrt[3]{5f(x) + 3g(x)}$

   c) $\lim\limits_{x\to p} \left(\frac{2f(x)-g(x)}{f(x)g(x)}\right)$

   d) $\lim\limits_{x\to p} \left(\frac{f(x)-g(x)}{f(x)+\sqrt{g(x)}}\right)$

4. Use el cálculo de límites para calcular los valores exactos de los siguientes límites.

   a) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x^3}$ $\quad R/ : +\infty$

   b) $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x^3}$ $\quad R/ : -\infty$

   c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^3}$ $\quad R/ : NoExiste$

   d) $\lim\limits_{x\to 3+} \frac{2x+1}{x-3}$ $\quad R/ : +\infty$

   e) $\lim\limits_{x\to 3-} \frac{2x+1}{x-3}$ $\quad R/ : -\infty$

   f) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x+1}{x-3}$ $\quad R/ : NoExiste$

   g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x+1}{x-3}$ $\quad R/ : 2$

   h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x+1}{x-3}$ $\quad R/ : 2$

   i) $\lim\limits_{x\to 0} cosx^{\frac{Senx}{x}}$ $\quad R/ : 1$

   j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x}$ $\quad R/ : 0$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{5x}$ $\quad R/: 1/5$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$ $\quad R/: 0$

m) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(1-\cos h)^2}{h}$ $\quad R/: 0$

n) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{\cot x}$ $\quad R/: 1$

ñ) $\lim\limits_{t \to o} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}$ $\quad R/: 1$

o) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}$ $\quad R/: 0$

p) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3(1-\cos x)}{x}$ $\quad R/: 0$

q) $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta \tan\theta}{\theta}$ $\quad R/: 1$

r) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan^2 x}{x}$ $\quad R/: 0$

s) $\lim\limits_{x \to \pi} x \sec x$ $\quad R/: -\pi$

t) $\lim\limits_{x \to \pi/4} \frac{1-\tan x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$ $\quad R/: \frac{-2}{\sqrt{2}}$

u) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$ $\quad R/: -senx$

v) $\lim\limits_{x \to +\infty} Arctanx^{Logx}$ $\quad R/: \infty$

w) $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{-Senx}{x}}$ $\quad R/: e^{-1}$

x) $\lim\limits_{x \to +\infty} Sen(Arctanx)$ $\quad R/: 1$

y) $\lim\limits_{x \to -\infty} Sen(Arctanx)$ $\quad R/: -1$

z) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sen(e^x)}{e^x}$ $\quad R/: 1$

5. Calcular $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ cuando f es:

   a) $f(x) = 3x^2 + 1$

   b) $f(x) = x^2 - 2x + 7$.

6. Una función f está definida como sigue:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \leq c \\ ax + b & \text{si} \quad x > c \end{cases}$$

   siendo a,b y c constantes. Si b y c están dados, hallar todos los valores de a (si existe alguno) para los cuales el valor del límite coincide con el valor de la función en el punto c.

7. Probar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

8. Determine la continuidad de cada una de las siguientes funciones. Trace la gráfica de f.

   a)
$$f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ x^2 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}$$

   b)
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   c)
$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x > 2 \\ x^2 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

9. Encuentre las asíntotas horizontales y verticales, si las hay, de la gráfica de f:

   a) $f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$
   b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-16}$
   c) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$
   d) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+3x}$

10. Aplique el teorema de Bolzano para demostrar que existe una raíz de la ecuación en el intervalo especificado.

    a) $x^3 - 3x + 1$, $[0, 1]$
    b) $x^2 = \sqrt{x+1}$, $[1, 2]$
    c) $\cos x = x$, $[0, \pi]$
    d) $\ln x = e^{-x}$, $[1, 2]$

11. Determinar los valores de las constantes a y b que hacen que la función sea continua en todo punto:

    a)
    $$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 2 \\ ax^2, & x > 2 \end{cases}$$

    b)
    $$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq -1 \\ ax + b, & -1 < x < 3 \\ -2, & x \geq 3 \end{cases}$$

12. Explicar por qué la función dada posee un cero en el intervalo especificado:

    a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en $[2, 4]$.
    b) $f(x) = x^3 + 3x - 2$ en $[0, 1]$.

13. Comprobar que el teorema del valor intermedio es aplicable al intervalo indicado y hallar el valor de c que garantiza el teorema:

    a) $f(x) = x^2 + x - 1$, $[0, 5]$, $f(c) = 11$.
    b) $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $[0, 3]$,$f(c) = 0$.

14. Muestre que la ecuación $x^3 - 4x = 0$ tiene tres raíces en el intervalo $[-3, 3]$:

15. Considere las funciones

$$f(x) = |x|\,, \quad g(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Trace las gráficas de $f \circ g$ y $g \circ f$. Determine si son continuas la compuestas.