Capítulo 4

FUNCIONES

Versión Beta 1.0

mathspace.jimdo@gmail.com
www.mathspace.jimdo.com

Tabla de contenido

Capítulo 4 1
FUNCIONES 1
4.1. ALGUNAS APLICACIONES 2
4.2. FUNCIÓN 2
4.2.1. Funciones reales 3
4.2.2. Representaciones de una función real 3
4.2.3. Dominio y rango de funciones reales. 4
4.2.4. Gráfica de una función 4
4.2.5. Prueba de la recta vertical 5
4.2.6. Técnicas básicas para esbozar la gráfica de una función 5
4.3. ALGUNOS TIPOS DE FUNCIONES 6
4.3.1. Funciones Algebraicas 6
4.3.2. Funciones Trascendentes 22
4.4. TRANSFORMACIONES 29
4.4.1. Traslaciones verticales 29
4.4.2. Traslaciones horizontales 29
4.4.3. Expansiones, Contracciones y Reflexiones 30
4.5. ÁLGEBRA DE FUNCIONES 31
4.6. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES 32
4.7. FUNCIÓN INYECTIVA, SOBREYECTIVA Y BIYECTIVA 33
4.7.1. Función Inyectiva 33
4.7.2. Función Sobreyectiva 33
4.7.3. Función Biyectiva 34
4.8. FUNCIÓN INVERSA 34
4.8.1. Funciones trigonométricas inversas. 35

4.1. ALGUNAS APLICACIONES

En la Física

Sabemos que al suspender un peso de un resorte, este se alarga, podríamos determinar la ley que rige este alargamiento, al menos para un determinado intervalo? Sería como tratar de expresar el alargamiento del resorte en función del tiempo.

En la Química

En el laboratorio de Química, podemos estudiar la temperatura de una masa de agua con respecto al tiempo en que es sometida al calor? Se trata de relacionar la temperatura en función del tiempo.

En la Economía

Un investigador suele expresar: el consumo en función del ingreso, también la oferta en función del precio, o el costo total de una empresa en función de los cambios de producción, entre otros muchos ejemplos donde se analiza como se comporta una variable en respuesta a los cambios que se producen en otras variables.

En la Biología

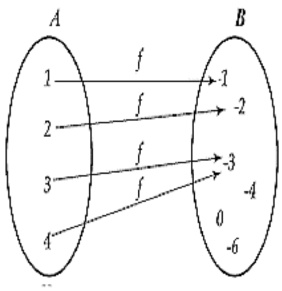
Cuando se trata se precisar: el crecimiento de una población animal o vegetal en función del tiempo, el peso de un bulbo en función del diámetro del mismo, el consumo de oxígeno en función del trabajo realizado.

4.2. FUNCIÓN

En muchas situaciones encontramos que dos o más objetos o cantidades están relacionados por una correspondencia de dependencia, como por ejemplo: el área de un círculo depende del radio del mismo, la temperatura de ebullición del agua depende de la altura del lugar, la distancia recorrida por un objeto al caer libremente depende del tiempo que transcurre en cada instante. Esto nos conduce al concepto matemático de función.

Definición: Sean A y B dos conjuntos no vacíos y f de A en B una función. Sea $a \in A$. El elemento que a f le hace corresponder a a en B, se llama *imagen de a* y se denota por $f(a)$ ($f(a)$: se lee: efe de a) y a recibe el nombre de *preimagen* de $f(a)$.

Ejemplo:



Sea $f : A \to B$.
Tal y como está definida esta correspondencia f es función de A en B, complete:

a) Al 1 se le asigna el -1, o sea $f(1) = -1$.
La imagen de 1 es -1
b) Al 2 se le asigna el -2,
____
c) Al 3 se le asigna el -3,
____
d) Al 4 se le asigna el -3,
____

4.2.1. Funciones reales

Una función real en una variable x es una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ donde $A \subseteq \mathbb{R}$, que usualmente se define por $y = f(x)$.

Nota: En general, para definir una función real se usan las letras x e y para representar las variables independiente y dependiente, respectivamente. En modelos de aplicaciones se usan letras relacionadas con el nombre de las magnitudes involucradas en el problema.

4.2.2. Representaciones de una función real

Una función real, en general, puede ser representada de distintas maneras:

- Mediante un conjunto de pares ordenados, o tabla de valores.

Clasificacion	IMC (kg/m^2)	
	Valores principales	Valores adicionales
Infrapeso	**<18.50**	**<18.50**
Delgadez severa	<16.00	<16.00
Delgadez moderada	16.00 - 16.99	16.00 - 16.99
Delgadez aceptable	17.00 - 18.49	17.00 - 18.49
Normal	**18.50 - 24.99**	**18.50 - 22.99**
		23.00 - 24.99
Sobrepeso	**≥25.00**	**≥25.00**
Preobeso	25.00 - 29.99	25.00 - 27.49
		27.50 - 29.99
Obeso	**≥30.00**	**≥30.00**
Obeso tipo I	30.00 - 34-99	30.00 - 32.49
		32.50 - 34.99
Obeso tipo II	35.00 - 39.99	35.00 - 37.49
		37.50 - 39.99
Obeso tipo III	≥40.00	≥40.00

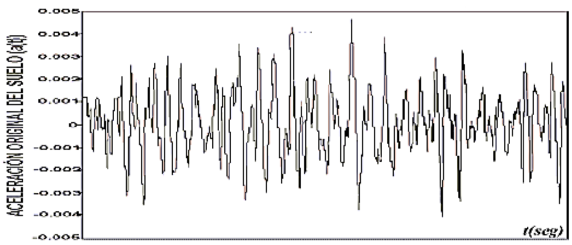
- Mediante una expresión verbal, donde se describe una regla con una descripción en palabras.

P(t) es la población mundial en el momento *t*.

- Mediante una expresión algebraica, con una fórmula explícita.

Área de un círculo: $A(r) = \pi(r^2)$

- Mediante una gráfica, representada en un sistema de coordenadas cartesianas.



ACELERACIÓN VERTICAL DURANTE UN TERREMOTO

Estas cuatro formas de representar una función son equivalentes, sin embargo no siempre es posible el paso de una a otra.

4.2.3. Dominio y rango de funciones reales.

Determinar el dominio de una función (Df).

Para determinar el dominio de una función *f*, de acuerdo a su regla *y=f(x)*, se analizan todos los valores posibles de la variable *x*, tal que *f(x)* es un número real.

Esto es, se despeja la variable *y*, para estudiar el comportamiento de la variable *x*. Al hacer este despeje, se consideran los siguientes casos:

- La variable *x* forma parte del denominador de una fracción.
- La variable *x* forma parte de un radical par.
- La variable *x* no forma parte de ni de un dominador ni de un radical.

Determinar el rango de una función (Rf).

El rango de una función *f*, es el conjunto de los números reales, que son imágenes de algún elemento del dominio, mediante *f*.

Determinar el rango, consiste en analizar todos los valores posibles que pueda tomar la variable *y*, tal que la variable *x* sea un número real. Para esto, se despeja la variable *x* en función de la variable *y*.

Ejemplo:

Sea *f* una función definida por la expresión: $f(x) = \frac{5}{2x-3}$

1. Determinar su dominio.

   En este caso, evaluando para el denominador distinto de cero, tenemos:

   $2x - 3 \neq 0 \Rightarrow 2x \neq 3 \Rightarrow x \neq 3/2$

   Por lo tanto, el dominio de *f* se escribe así: $Df = \mathbb{R} - \{3/2\}$.

2. Determinar su rango.

$$y = \frac{5}{2x-3} \Rightarrow \boldsymbol{2x - 3} = \frac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{y}} \Rightarrow \boldsymbol{2x} = \frac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{y}} + \mathbf{3} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{5+3}\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}\boldsymbol{y}}$$

   Lo anterior muestra que: $\boldsymbol{R}f = \mathbb{R} - \{\mathbf{0}\}$

4.2.4. Gráfica de una función

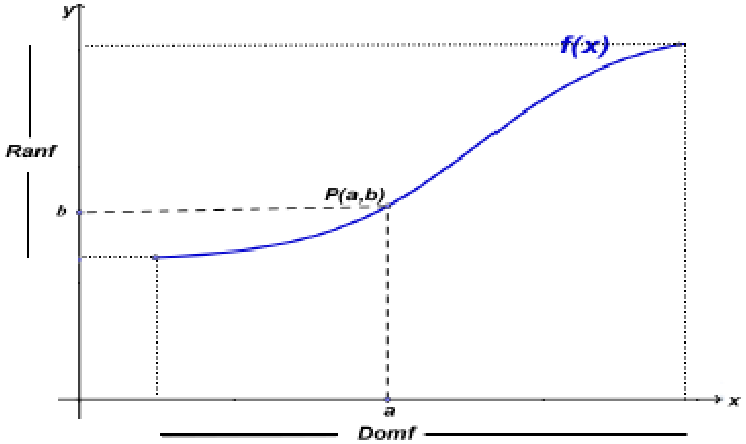
Las gráficas permiten obtener una representación visual de una función. Estas entregan información que puede no ser tan evidente a partir de descripciones verbales o algebraicas.

Para representar gráficamente una función *y = f(x)*, es común utilizar un sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas, en las cuales, la variable independiente *x* se representa en el *eje horizontal*, y la variable dependiente *y* en el *eje vertical*.

La gráfica de *y = f(x)* es el conjunto: $f \ = \{(x;\ f(x));\ x\ \in\ Df\}$.

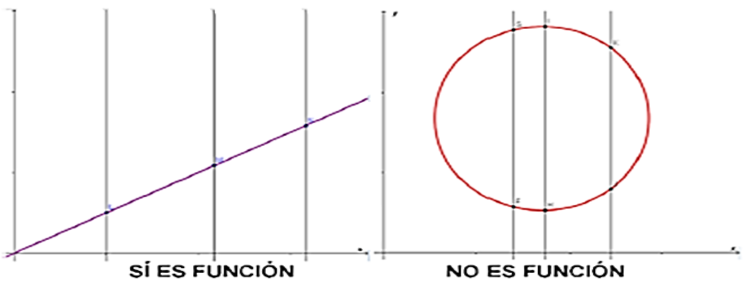
Si *P(a; b)* es un punto de la gráfica, la coordenada *y = b* es el valor de la función *f(a)*.

La figura muestra el dominio de *f* (conjunto de valores posibles de *x*) y el rango de *f* (valores correspondientes de *y*).



4.2.5. Prueba de la recta vertical

La gráfica de un conjunto de puntos de un plano coordenado es la gráfica de una función si toda recta vertical corta la gráfica en un punto cuando mucho.



4.2.6. Técnicas básicas para esbozar la gráfica de una función

A continuación se describen algunos pasos a seguir para obtener un esbozo de la gráfica de $y\ =\ f(x)$, por medio de la representación de puntos:

1. Determinar el dominio y rango de la función.

2. Determinar los puntos de intersección de $y\ =\ f(x)$ con cada eje coordenado.

   a. Intersección con el eje *Y* (*x=0*).

b. Intersección con el eje *X* (*y=0*).

3. Construir una tabla de valores de *f*. Escoger un grupo representativo de valores de *x* en el dominio de *f*, y construir una tabla de valores $(x;\ f(x))$.

4. Representar los puntos $(x;\ f(x))$ considerados en la tabla, en el sistema de coordenadas.

5. Unir los puntos representados.

Nota: Muchas curvas diferentes pasan a través de los puntos considerados en la tabla de valores. Para aproximarse mejor a la curva que represente a la función dada, graficar nuevos puntos si es necesario.

4.3. ALGUNOS TIPOS DE FUNCIONES

4.3.1. Funciones Algebraicas

Las funciones algebraicas son aquellas cuya regla de correspondencia es una expresión algebraica. Las funciones algebraicas pueden ser:

- ***Funciones Explícitas:*** Es una relación en la cual aparece despejada la variable dependiente. Esto es:

$$y = f(x)$$

- ***Funciones Implícitas:*** Cuando no está despejada ninguna variable. Esto es:

$$F(x, y) = 0$$

4.3.1.1. Funciones polinómicas (polinomiales)

Son funciones de la forma:

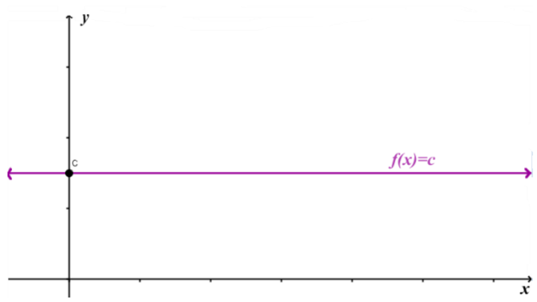
$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

Donde *n* es un entero, y los coeficientes $a_n, \dots, a_1, a_0$ son números reales.

a. Función constante

Una función constante es aquella que tiene la forma *f(x)* = *c*, donde *c* es un número real fijo.

Su gráfica es una recta paralela (o coincidente) al eje *X*.



- ***Df***: ______________________________.
- ***Rf***: ______________________________.

Ejemplo:

$f(x) = -3.$

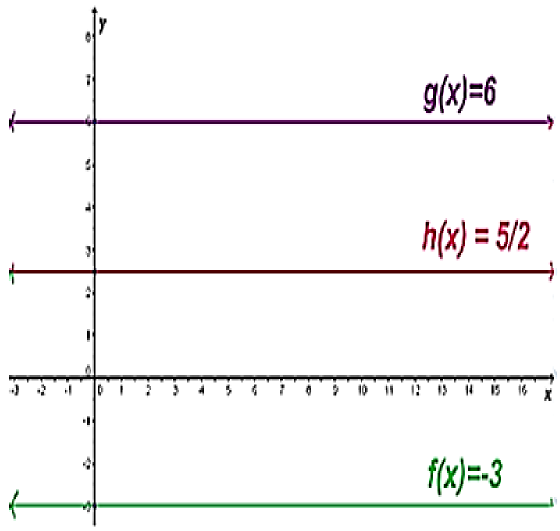
$h(x) = {}^5/_2.$

$g(x) = 6.$

- ***Df***: ______________________________.
- ***Rf***: ______________________________.

- ***Dg***: ______________________________.
- ***Rg***: ______________________________.

- ***Dh***: ______________________________.
- ***Rh***: ______________________________.



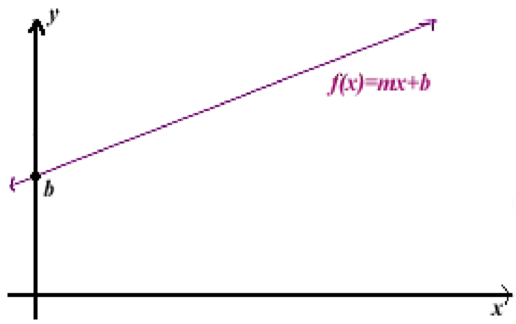
b. Función lineal

Es una función que tiene la forma o puede ser llevada a la forma:

$$y = mx + b.$$

Donde: *m* se denomina pendiente y *b* ordenada al origen (intercepto con el eje *Y*).

Su grafica es una recta.



- ***Df***: ______________________________.
- ***Rf***: ______________________________.

Ejemplo: *f(x) = 2x – 1*

- ***Df***: ______________________________.
- ***Rf***: ______________________________.

1. **Puntos de intersección:**

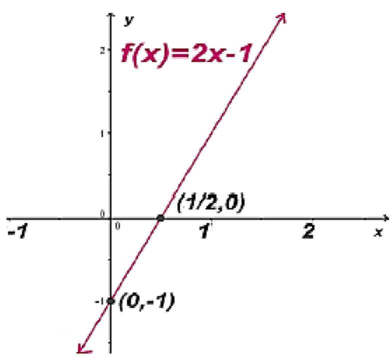
   -Con el eje *x* (*y* = 0):

   $$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

   -Con el eje *y* (*x* = 0):
   f(0) = 2(0) - 1 , f(0) = -1.

2. **Tabla de valores**
   Dado que la función *f(x) = 2x-1* representa una línea recta **NO ES NECESARIO** hacer una tabla de valores, pues son suficientes dos puntos para hacer una representación gráfica.

De esta manera, la recta pasa por los puntos $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$ y $(0;\ -1\ )$.



Propiedades de una función lineal

Pendiente de una recta

El número: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ se denomina *pendiente* de la recta determinada por los puntos $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$. Note que $x_1 \neq x_2$.

- Si $m > 0$, se dice que la recta es creciente.
- Si $m < 0$, se dice que la recta es decreciente.
- Si $m = 0$, se dice que la recta es constante.

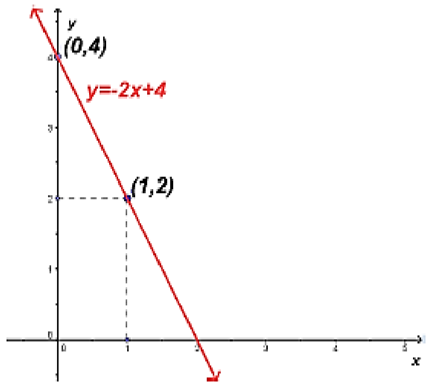
Ecuación Punto-Pendiente

La ecuación de la recta que pasa por el punto $(x_1; y_1)$ con pendiente m es: $Y - y_1 = m(X - x_1)$.

Ejemplo: Determinar la ecuación de la recta con pendiente -2 y que pasa por el punto de coordenadas (1; 2).

Dado que: $m = -2$, la recta es decreciente.
Y como $x_1 = 1$ y $y_1 = 2$ se tiene:

$$Y - y_1 = m(X - x_1).$$
$$Y - 2 = m(X - 1).$$
$$Y = -2(X - 1) + 2.$$
$$Y = -2X + 2 + 2.$$
$$Y = -2X + 4.$$



Rectas paralelas y rectas perpendiculares

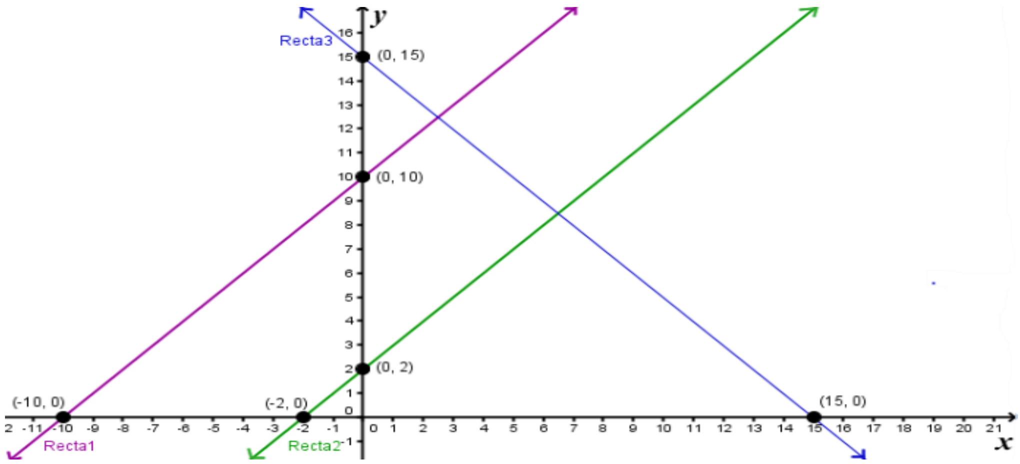
Sean l_1 y l_2 rectas con pendientes m_1 y m_2 respectivamente.

- $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$ (Las rectas serán paralelas).
- $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$ (Las rectas serán perpendiculares).

Ejemplo: Note que, para el grafico que se representa a continuación:

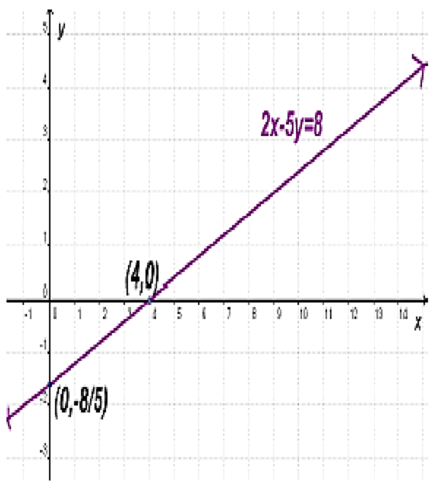
- Recta1 es paralela a Recta2 y
- Recta3 es perpendicular a Recta1 y también es perpendicular a Recta2.

Ejercicio: Pruebe las afirmaciones del ejemplo anterior.



Ejemplo: Trazar la gráfica de *2x-5y = 8.*

- ***Df***: ______________________________.
- ***Rf***: ______________________________.



1. Puntos de intersección:

-Con el eje *x* (*y* = 0):
2x-5(0) = 8, luego x = 4.

-Con el eje *y* (*x* = 0):
2(0)-5y = 8, luego $y = \frac{-8}{5}$.

De esta manera, la recta pasa por los puntos (4; 0) y (0; $\frac{-8}{5}$).

2. Tabla de valores

Dado que la función *2x-5y = 8* representa una línea recta **NO ES NECESARIO** hacer una tabla de valores, pues son suficientes dos puntos para hacer una representación gráfica.

Nota: *Despejando* la variable dependiente *y,* tenemos la ecuación de la forma *y=mx+b:*

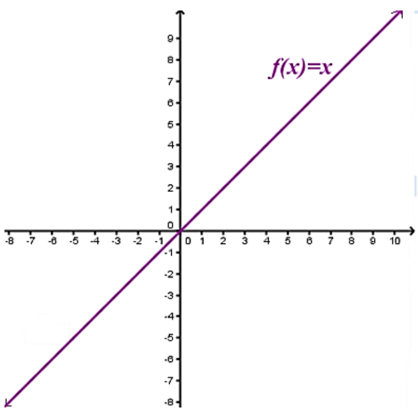
$$y = \frac{2}{5}x - \frac{8}{5}$$

Función Identidad.

Toda función lineal creciente de la forma *f(x) = x*, se llama función identidad.

Su gráfica es una línea recta que interseca a ambos ejes en el origen de coordenadas.

- ***Df***: ______________________________.
- ***Rf***: ______________________________.



c. *Función cuadrática*

Una función cuadrática es aquella que tiene la forma, o puede ser llevada a la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c;\ con\ a \neq 0;\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

Su grafica es una parábola.

- ***Df***: ______________________________.
- ***Rf***: ______________________________.

Ejemplo: *f(x) = x^2*

- ***Df***: ______________________________.
- ***Rf***: ______________________________.

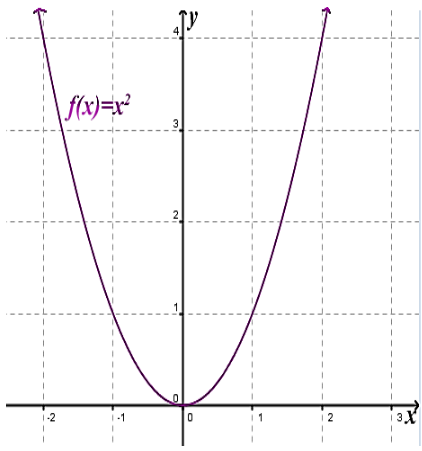
1. **Puntos de intersección:**

   -Con el eje *x* (*y* = 0):
   $x^2=0$, *luego* $x = 0$.
   -Con el eje *y* (*x* = 0):
   $y=0^2$, luego. *y*=0

   De esta manera, la curva pasa por el punto (0; 0).

2. **Tabla de valores**

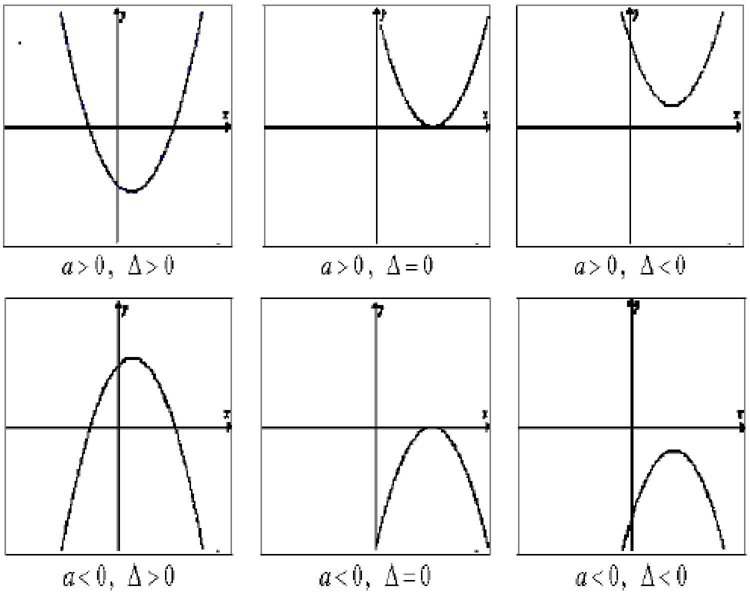
x	*f(x)=x^2*
-2	4
-1	1
-0.5	0.25
0	0
0.5	0.25
1	1
2	4



Propiedades de una función cuadrática

- Dicha parábola tiene como vértice el punto: $V\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.
- La recta vertical $x = \frac{-b}{2a}$ es una recta denominada *eje de simetría*.
- Si *a* > 0 la parábola se abre hacia arriba, y si *a* < 0 se abre hacia abajo.

Gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$



$\Delta = b^2 - 4ac$

Ejemplo: Representar gráficamente la función:

$$g(x) = x^2 - 4x + 3$$

- ***Df***: ____________________________.
- ***Rf***: ____________________________.

1. Puntos de intersección.

- Con el eje *x* (*y* = 0):

  $x^2 - 4x + 3 = 0$

  Se hace uso de la siguiente expresión, para hallar los ceros o raíces de la función cuadrática dada:

  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  En nuestro ejemplo tendríamos:

  a = 1; b = -4 y c = 3

  Esto es:

  $$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

  $$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

  Luego, $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$.

  Es decir, los puntos de corte con el eje *X* tienen coordenadas:

  (3; 0) y (1; 0)

- Corte con el eje *Y* es (cuando *x = 0*):

  $g(0) = (0)^2 - 4(0) + 3$

  Es decir, el punto de corte con el eje *Y* tiene coordenadas:

  (0,3).

2. Tabla de valores

x	$\boldsymbol{g(x) = x^2 - 4x + 3}$

3. *Vértice:*

$V\left(\frac{-b}{2a}; g\left(\frac{-b}{2a}\right)\right).$

$V\left(\frac{-(-4)}{2(1)}; g\left(\frac{-(-4)}{2(1)}\right)\right).$

$V(2; g(2)).$

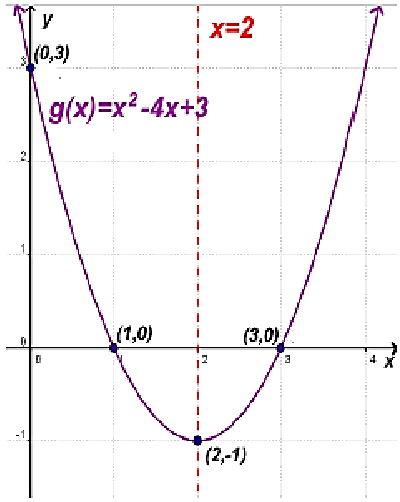
$V(2; -1).$

4. *Eje de simetría*

$$x = \frac{-b}{2a}$$
$$x = 2$$

5. *Dirección de apertura de la parábola*

Dado que $a = 1 > 0$, la parábola abre hacia arriba.



d. Función cúbica

Una función cúbica es aquella que tiene la forma, o puede ser llevada a la forma:

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ con\ a \neq 0, \qquad a;\ b;\ c;\ d\ \in \mathbb{R}$$

- ***Df*: ______________________________.**
- ***Rf*: ______________________________.**

Ejemplo: $f(x) = x^3$.

- ***Df*: ______________________________.**
- ***Rf*: ______________________________.**

1. **Puntos de intersección:**

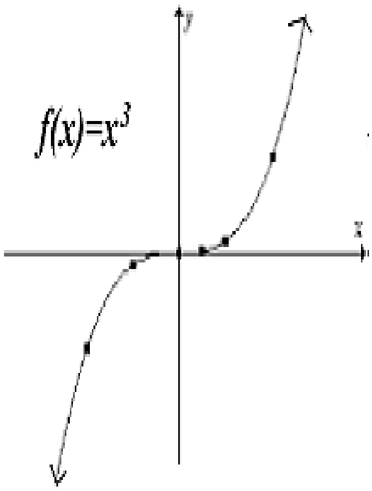
-Con el eje *x* (*y* = 0):
$x^3=0$, *luego* $x = 0$.

-Con el eje *y* (*x* = 0):
$y=0^3$, luego. $y=0$

De esta manera, la curva pasa por el punto (0; 0).

2. **Tabla de valores**

x	$f(x)=x^3$
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27



Ejemplo: Representar gráficamente la función:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$$

1. Corte con el eje Y es (cuando $x = 0$): $(0, 12)$.

2. Corte con el eje X es (cuando $f(x) = 0$):

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

En este caso se hace uso de los métodos aprendidos previamente para factorizar y determinar así las raíces o ceros del polinomio.

-División sintética:

Se escribe una lista con todos los divisores del término independiente (12) (que son candidatos a ser raíces del polinomio).

En nuestro caso: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4 y ± 12

Para determinar cuáles de los divisores son raíces, se hace uso del «*Teorema del residuo*».

$f(1) = 6 \neq 0$
$f(-1) = 12 \neq 0$
$f(2) = 0$

(Luego, $x = 2$ es una raíz del polinomio dado y por tanto, $x - 2$ es un factor del mismo).

De esta manera:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & -4 & 12 & \underline{2} \\ & 2 & -2 & -12 & \\ \hline 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

Así:

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x^2 - x - 6)(x - 2)$

y factorizando la nueva función polinómica: $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$

se tiene:

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x + 2)(x - 3)(x - 2)$

De esta manera, los cortes con el eje x de $f(x)$ (raíces o ceros) son:

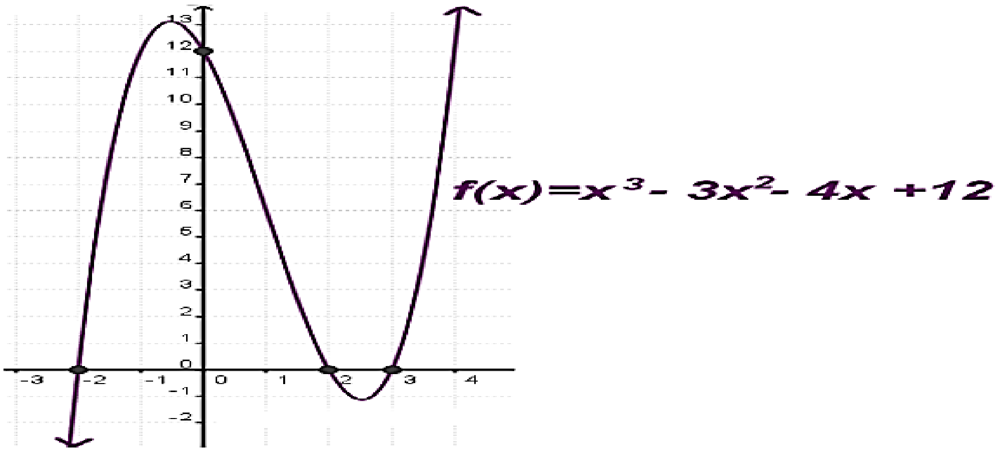
$x_1 = -2$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$

-Para trazar «aproximadamente» el gráfico, se determina también los intervalos de positividad donde $f(x)$ está por arriba de X y de negatividad donde $f(x)$ está por debajo de X. Dichos intervalos están determiados por las raíces del polinomio: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$

Nota: Recuerde escribir las raíces de menor a mayor.

Se completa la siguiente tabla con los signos que correspondan ($+o-$), para lo cual se elige un número dentro de cada uno de los intervalos determinados y se avalúa en cada factor así:

FACTOR	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,3)$	$(3,\infty)$
$x+2$	-	+	+	+
$x-3$	-	-	-	+
$x-2$	-	-	+	+
$f(x)=(x+2)(x-3)(x-2)$	-	+	-	+



Nota: Los demás puntos se determinan con una tabla de valores.

e. Funciones Racionales

Una función racional *f* es una función definida por una expresión algebraica que es el cociente de dos polinomios:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde *p(x)* y *q(x)* son polinomios, tal que $q(x) \neq 0$.

- ***Df:*** El dominio de una función racional está determinado por todos los números reales, excepto los ceros del denominador *q(x).*
- ***Rf:*** El rango de una función racional está determinado por todos los números reales, excepto los números donde se determinan asíntotas horizontales.

***Ejemplo**:* $f(x) = \frac{1}{x}$

- ***Df:*** ______________________________.
- ***Rf:*** ______________________________.

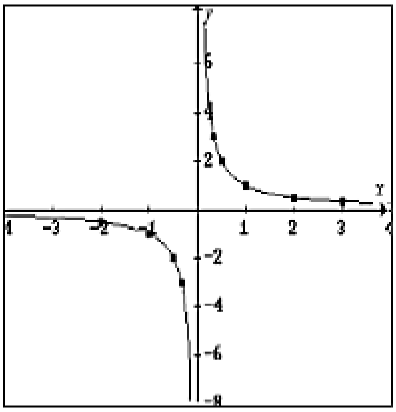
1. Puntos de Intersección:

-Con el eje *x (y = 0):*

-Con el eje *y (x = 0):*

2. Tabla de valores

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
-2	-1/2
-1	-1
-1/2	-2
-1/3	-3
0	No está definida
1/3	3
1/2	2
1	1
2	½



Asíntotas

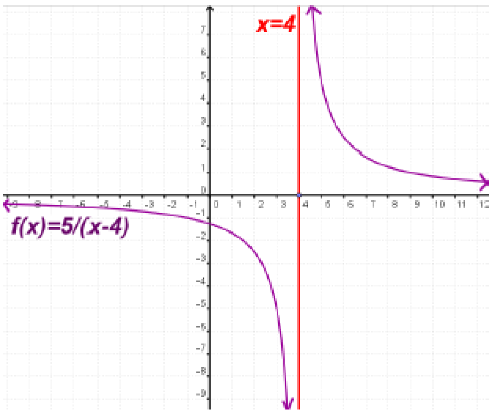
Una asíntota es una recta que se encuentra asociada a la gráfica de algunas curvas y que se comporta como un límite grafico hacia el cual la gráfica se aproxima indefinidamente pero “nunca” la toca.

A medida que la variable independiente de la función tiende hacia un cierto valor, la correspondiente variable dependiente tiende a infinito, cualquiera que este sea. En general, la recta puede tener cualquier orientación, sin embargo, en nuestro caso únicamente estudiaremos las asíntotas verticales y horizontales.

Asíntota Vertical

Son rectas verticales presentes únicamente en funciones racionales y se determinan encontrando las raíces del denominador correspondiente. Entonces, el número de raíces asociados a una función determinarían el número de asíntotas verticales que tiene tal función.

Ejemplo: $f(x) = \frac{5}{x-4}$ tiene como asíntota vertical la recta $x = 4$ pues $x - 4 = 0$ siempre que $x = 4$.



Asíntota Horizontal

Como su nombre lo indica, son rectas horizontales asociadas a la función. Se encuentran presentes únicamente en funciones racionales y se determinan haciendo que la variable independiente x se aproxime al infinito lo que trae como consecuencia que la función cociente tienda a un valor determinado fijo al que “nunca” va a llegar o sobrepasar.

Las asíntotas horizontales aparecen cuando ocurre una de las siguientes condiciones (ambas condiciones no pueden ocurrir en la misma función):

CASO 1: El grado del numerador es **igual** al grado del denominador. En este caso, la asíntota es la recta horizontal $y = a/b$, donde a es el coeficiente de mayor grado del numerador y b es el del denominador.

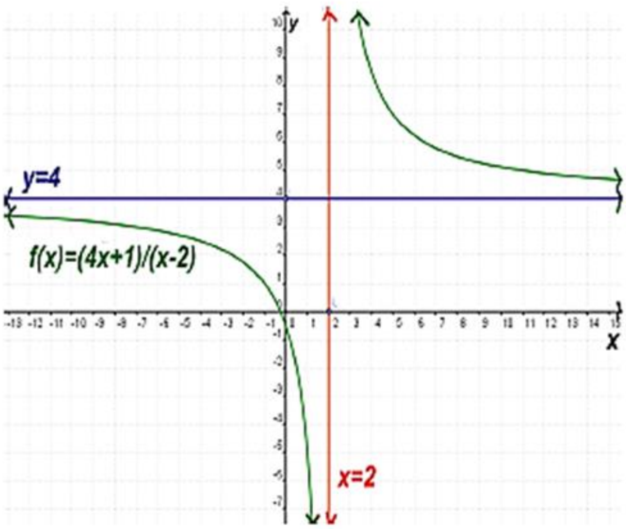
CASO 2: El grado del numerador es **menor** que el grado del denominador. En este caso, la asíntota es la recta horizontal $y = 0$.

CASO 3: Cuando el grado del numerador es **mayor** que el grado del denominador la función no tiene asíntota horizontal.

Ejemplo: Obtenga la(s) asíntota vertical (es) y horizontal(es) de la función: $f(x) = \frac{4x+1}{x-2}$

- La asíntota vertical se encuentra cuando $x-2 = 0$, es decir la recta $x = 2$ es la asíntota vertical.

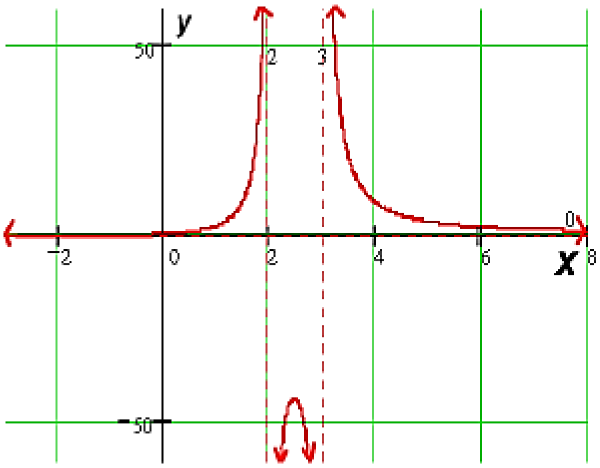
- La asíntota horizontal se encuentra en el cociente de los términos de mayor exponente, es decir, la recta $y = 4$ es la asíntota horizontal.



Ejemplo: Obtenga la(s) asíntota vertical (es) y horizontal(es) de la función: $f(x) = \frac{4x+1}{x^2-5x+6}$

- La asíntota vertical se encuentra cuando $x^2 - 5x + 6 = 0$, es decir las rectas $x = 2$ y $x = 3$ son las asíntotas verticales.

- Dado que el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador, entonces la asíntota horizontal es la recta $y = 0$.



Trazado de la gráfica de una función racional

Para obtener un esbozo de la gráfica de una función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es necesario determinar:

1. El dominio de *f(x).*

2. Asíntotas verticales y horizontales.

3. Intersecciones de la gráfica de *f* con el eje *X* y con el eje *Y*.

4. Análisis de signos de *f(x)*. (En el que se consideran los cortes con el eje X y también las asíntotas verticales).

5. Graficar *f(x)* en cada región del plano *XY* .

Ejemplo: Trazar la gráfica de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{4x+1}{x-2}}$$

1. *Df = R – {2}.*

2. Asíntotas

Asíntotas verticales: *x = 2.*
Asíntotas horizontales: *y = 4.*

3. Cortes con los ejes coordenados:

- Corte con el eje *X (cuando y = 0):*

$$y = \frac{4x+1}{x-2} = 0$$

Luego:

$$4x + 1 = 0$$

De ahí que:

$$x = \frac{-1}{4}$$

Luego, en este caso hay un único punto de corte con el eje *X*, y es el punto de coordenadas: $\left(\frac{-1}{4}; 0\right)$.

- Corte con el eje *Y (cuando x = 0):*

$$y = \frac{4x+1}{x-2}$$

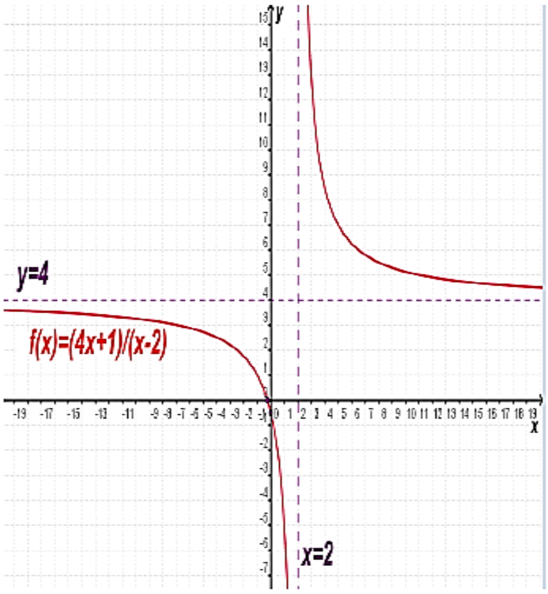
Luego,

$$y = \frac{4(0)+1}{(0)-2} = \frac{-1}{2}$$

En este caso hay un único punto de corte con el eje Y, y es el punto de coordenadas: $\left(0;\ \frac{-1}{2}\right)$.

4. Análisis de signos:

FACTOR	(-∞, -1/4)	(-1/4, 2)	(2, ∞)
4x+1	-	+	+
x-2	-	-	+
f(x)= (4x+1)/(x-2)	+	-	+



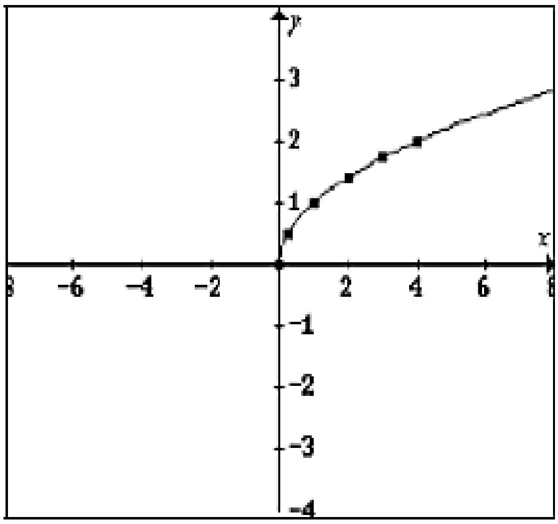
f. Funciones Radicales

Las funciones radicales son aquellas en las que la variable se encuentra bajo el signo radical.

Función radical de índice par.

Ejemplo: $f(x) = \sqrt{x}$

- ***Df:*** ________________________________.
- ***Rf:*** ________________________________.



1. Puntos de intersección:

-Con el eje x $(y = 0)$:

-Con el eje y $(x = 0)$:

De esta manera, la curva pasa por el punto (0; 0).

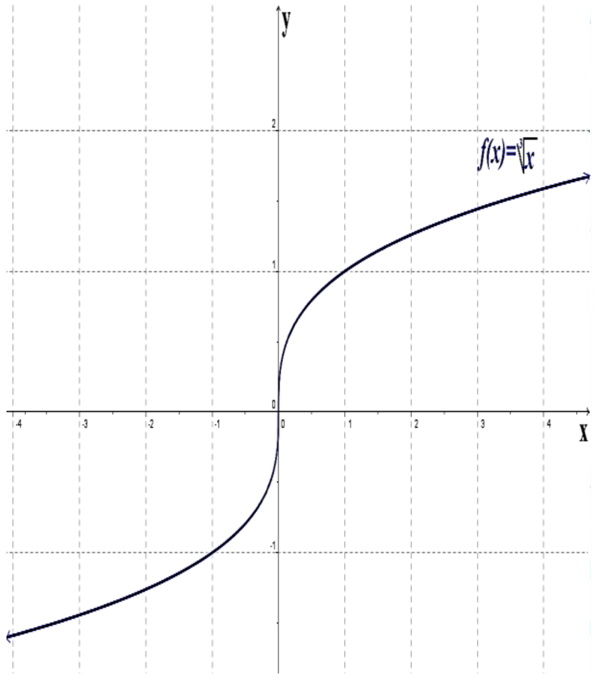
2. Tabla de valores:

x	$f(x) = \sqrt{x}$
0	0
1/4	½
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
4	2

Función radical de índice impar.

Ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{x}}$

***Df:* ____________________________.**
***Rf:* _____________________________.**



1. Puntos de intersección:

-Con el eje *x (y = 0):*

-Con el eje *y (x = 0):*

De esta manera, la curva pasa por el punto (0; 0).

2. Tabla de valores:

x	$\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{x}}$

g. Funciones A Trozos

Las funciones definidas a trozos o por partes son las que tienen distinta expresión algebraica según el intervalo en el que están definidas.

***Ejemplo*:** $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in [-3,0) \\ x^2 - 2x + 1 & x \in [0,3] \\ 4 & x \in (3,7) \end{cases}$

***Df:* ____________________________.**
***Rf:* _____________________________.**

1. Puntos de intersección:

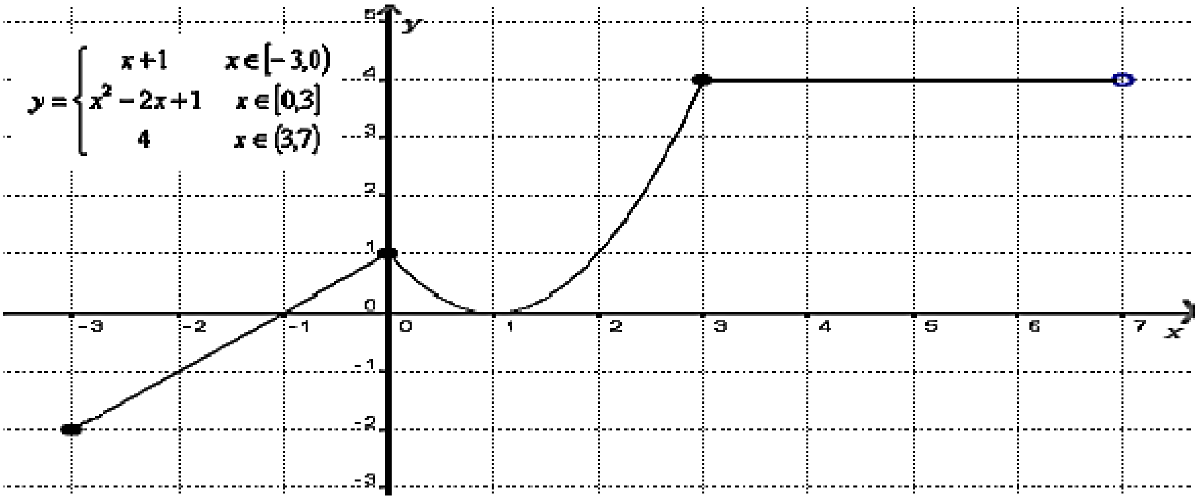
-Con el eje *x (y = 0):*

-Con el eje *y (x = 0):*

2. Tabla de valores:

x	$\boldsymbol{f(x)}$

Nota: Suele nombrarse a $f_1, f_2, \ldots, f_n$ a cada una de las funciones que componen la función a trozos f y hacer el análisis de cada f_i, como se aprendió antes. ($i=1,2,\ldots,n$).



h. Función valor absoluto.

La función de valor absoluto tiene por ecuación $f(x) = |x|$. Se define: Si x es un número real, entonces el valor absoluto de x es:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

***Df:* ______________________________.**
***Rf:* ______________________________.**

1. Puntos de intersección:

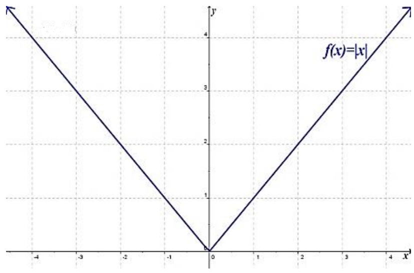
-Con el eje x (y = 0):

-Con el eje y (x = 0):

De esta manera, la curva pasa por el punto____________.

2. Tabla de valores:

x	$f(x)$



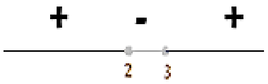
Las funciones en valor absoluto se transforman en funciones a trozos, siguiendo los siguientes pasos:

1. Se iguala a cero la función, sin el valor absoluto, y se calculan sus raíces.
2. Se forman intervalos con las raíces y se evalúa el signo de cada intervalo.
3. Definimos la función a trozos, teniendo en cuenta que en los intervalos donde la x es negativa se cambia el signo de la función.
4. Representamos la función resultante.

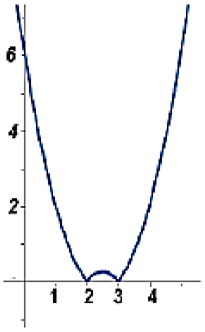
Ejemplo:

$$f(x) = \left|x^2 - 5x + 6\right|$$

- $x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad x = 2 \qquad x = 3$



- $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ -(x^2 - 5x + 6) & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ x^2 - 5x + 6 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$



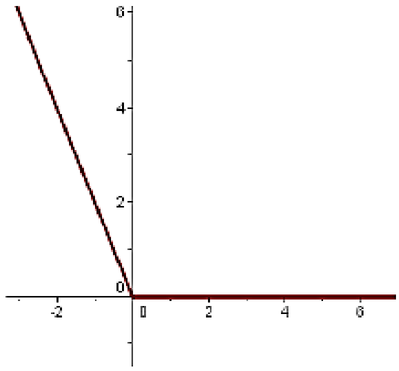
Ejemplo:

$$f(x) = |x| - x$$

$x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} -x - x & \text{si} \quad x<0 \\ x - x & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

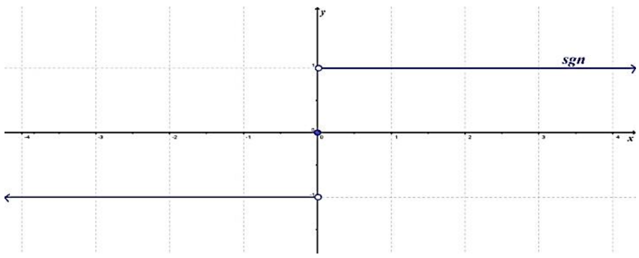
$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$



i. Función signo.

La función signo se define como $sgn = \frac{x}{|x|}$, de forma que hace corresponder el valor 1 a los números positivos y -1 a los negativos. Se puede expresar:

$$sgn = \begin{cases} \mathbf{1} & \boldsymbol{x > 0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{x = 0} \\ \mathbf{-1} & \boldsymbol{x < 0} \end{cases}$$



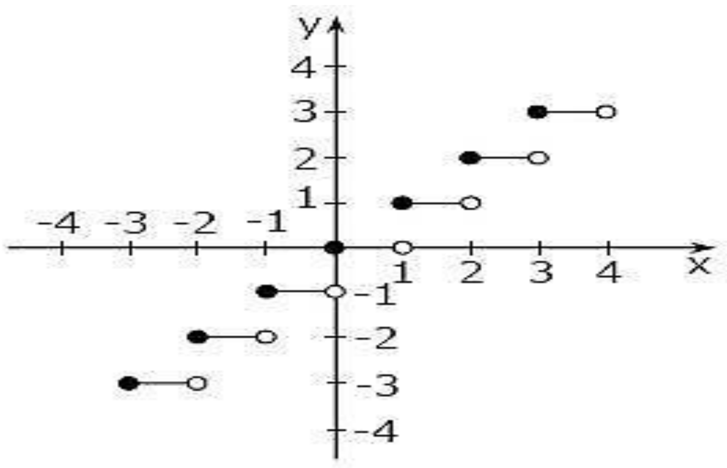
j. Función parte entera.

Es la función que asigna a cada número real el número entero que cumple la propiedad de ser el mayor de todos los enteros que son menores o iguales que *"x"*. Se denota por: *E(x)*.

Ejemplo:

E(2.1) = 2,
E(2.3) = 2,
E(2.9) = 2,
E(2.99) = 2,

E(3) = 3,
E(-4.1) = -5,
E(-4.9) = -5,
E(-5) = -5.



4.3.2. Funciones Trascendentes

Las funciones no algebraicas se denominan trascendentes. Las funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas, así como sus inversas, son funciones trascendentes.

Las funciones trascendentes suelen utilizarse en muchas aplicaciones, por ejemplo, en la determinación del crecimiento de la población, el cálculo de vibraciones y ondas, la eficiencia de algoritmos de computadora y la estabilidad de estructuras de ingeniería.

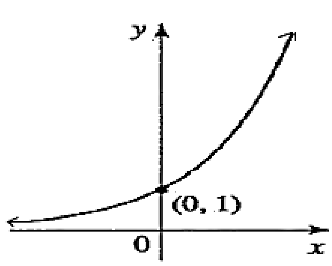
a. Función exponencial

Una función exponencial es aquella que está escrita de la forma:

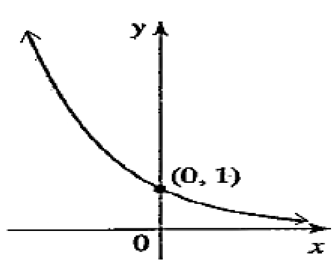
$$f(x) = a^x\text{. Donde } a \in \mathbb{R}^+;\ a \neq 1 \text{ y } x \in \mathbb{R}.$$

- ***Df*: ______________________________.**
- **R*f*: ______________________________.**

Según sea el valor de *a* se tiene:



$f(x) = a^x$ para $a > 1$



$f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$

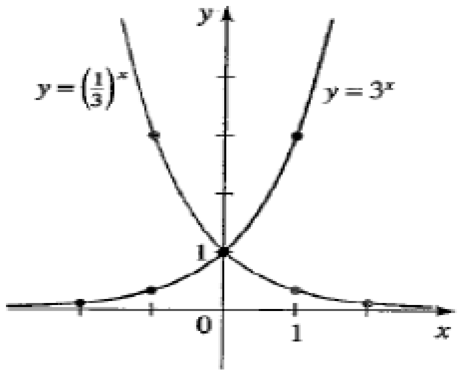
Ejemplo: Sean $\boldsymbol{f(x) = 3^x}$ y $\boldsymbol{g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x}$

- ***Df*:** ____________________________.
- **R*f*:** ____________________________.

1. **Puntos de Intersección**

2. **Tabla de valores**

x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = (\frac{1}{3})^x$
-3	$\frac{1}{27}$	27
-2	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$



Nota:

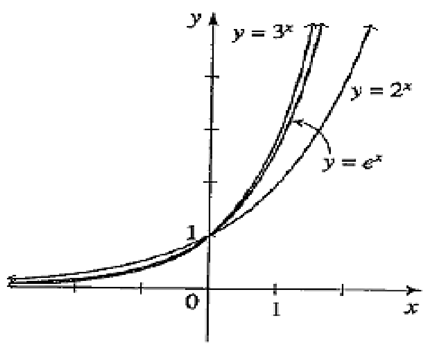
Cualquier número positivo puede utilizarse como base para una función exponencial, pero algunas bases se utilizan con mayor frecuencia que otras como es el caso del número irracional identificado mediante la letra ***e***. Donde $\boldsymbol{e \approx 2,71828}$ ...

e suele presentarse en aplicaciones tales como en la descripción del interés compuesto y en el crecimiento demográfico.

Función exponencial natural

Es la función $f(x) = e^x$.

Dado que *2 < e < 3*, la gráfica de la función exponencial natural se encuentra entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$, como se muestra en la figura.

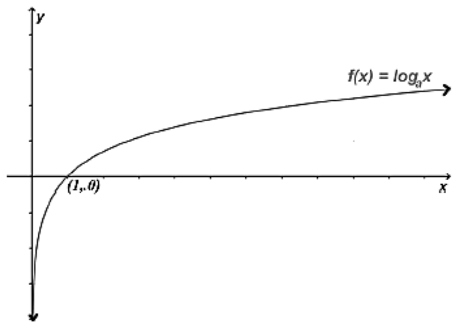


b. Función logarítmica

La función logarítmica en base a es la función inversa de la exponencial en base a y se define como:

$$log_a x = y \leftrightarrow a^y = x$$

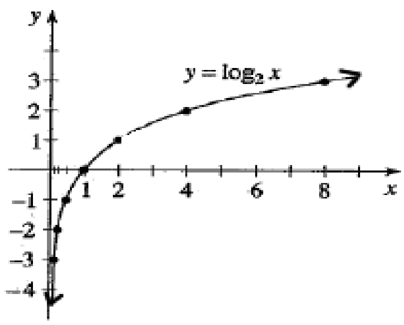
- ***Df:*** ______________________________.
- ***Rf:*** ______________________________.



Ejemplo: Trace la gráfica de $f(x) = log_2 x$.

Para elaborar una tabla de valores, se escogen los valores de *x* como potencias de 2 para encontrar fácilmente sus logaritmos. Se grafican estos puntos y se unen con una curva suave.

x	$\log_2 x$
1	0
2	1
2^2	2
2^3	3
2^4	4
2^{-1}	-1
2^{-2}	-2
2^{-3}	-3
2^{-4}	-4



Observación: Hay dos logaritmos cuyas bases se usan con más frecuencia y estos son:

1. **Logaritmo común.** Son aquellos logaritmos cuya base es 10 y se denota omitiendo la base:

$$logx = log_{10}x$$

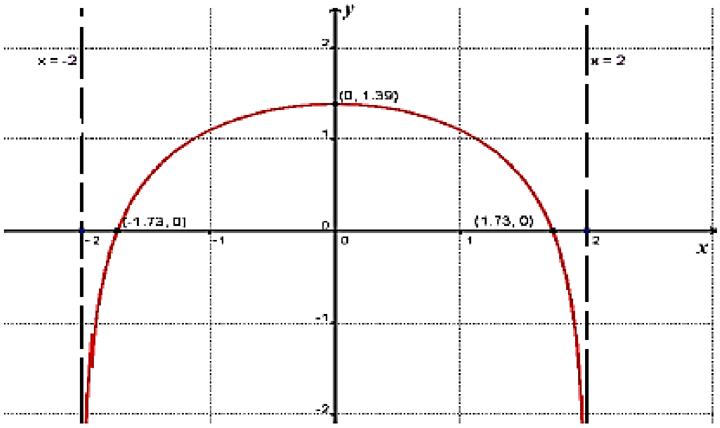
2. **Logaritmo natural.** Son aquellos logaritmos cuya base es *e* y se denota por L*n*:

$$Lnx = log_e x$$

Ejemplo: Determine el dominio de la función: $f(x) = Ln(4-x^2)$.

Como en el caso de cualquier función logaritmo, *Lnx* está definido cuando $x > 0$. Así, el dominio de *f* es:

Df= $\{x/4 - x^2 > 0\} = \{x/x^2 < 4\} = \{x/\,|x| < 2\} = \{x/ -2 < x < 2\} = (-2, 2)$

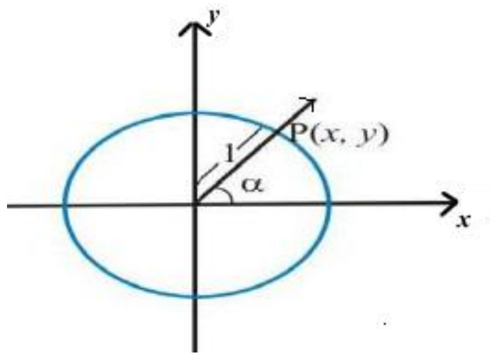


1. Puntos de Intersección

2. Tabla de valores

c. Funciones trigonométricas (circulares)

Se sabe que los valores de las funciones circulares, no dependen del radio del circulo donde se encuentre el punto *P(x; y)* perteneciente al lado terminal de un ángulo en su forma estándar. Se puede suponer, por consiguiente, que las funciones circulares han sido definidas usando el círculo $x^2 + y^2 = 1$, como lo señala la figura:



Las funciones trigonométricas son importantes, porque son periódicas o se repiten y, por lo tanto, modelan muchos procesos naturales periódicos. Las funciones trigonométricas básicas son: seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante.

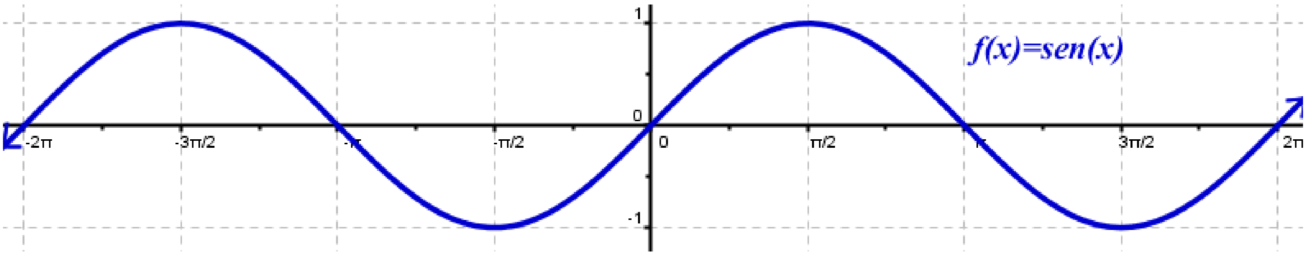
Función seno

En la figura anterior, $senx$ es el valor de la ordenada del punto $P(x;\, y)$ del círculo $x^2 + y^2 = 1$. La anterior afirmación permite construir, con relativa facilidad, la gráfica de la función $f(x) = senx$ de la forma siguiente:

- Si el ángulo está medido en radianes, esta medida está representada por un número real; el ángulo elegido puede ser positivo, negativo o cero y por tanto el dominio de la función es el conjunto de los números reales.

- Como el valor de $senx$ es la ordenada $\boldsymbol{y}$ de algún punto del círculo unitario, se tiene que el valor máximo que toma $senx$ es 1 y el valor mínimo es -1.

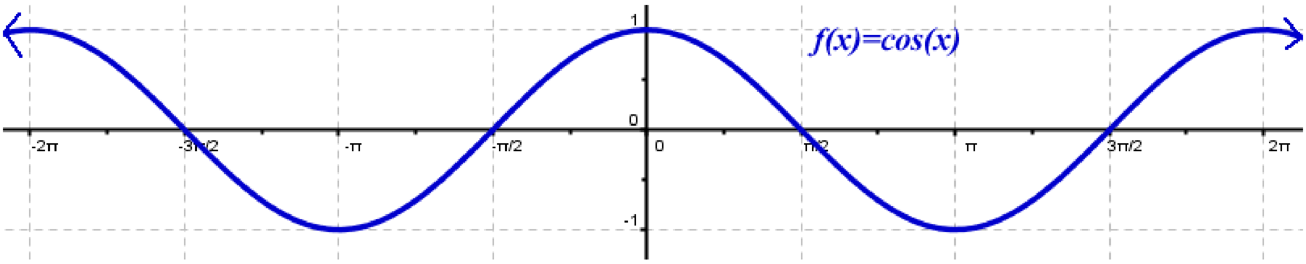
La grafica de la función $f(x) = senx$, para valores de x medidos en radianes, es la siguiente:



- ***Df:*** ______________________________.
- ***Rf:*** ______________________________.
- ***Período:*** $2\pi\ rad$
- ***Impar:*** $sen(-x) = -senx$

Función coseno

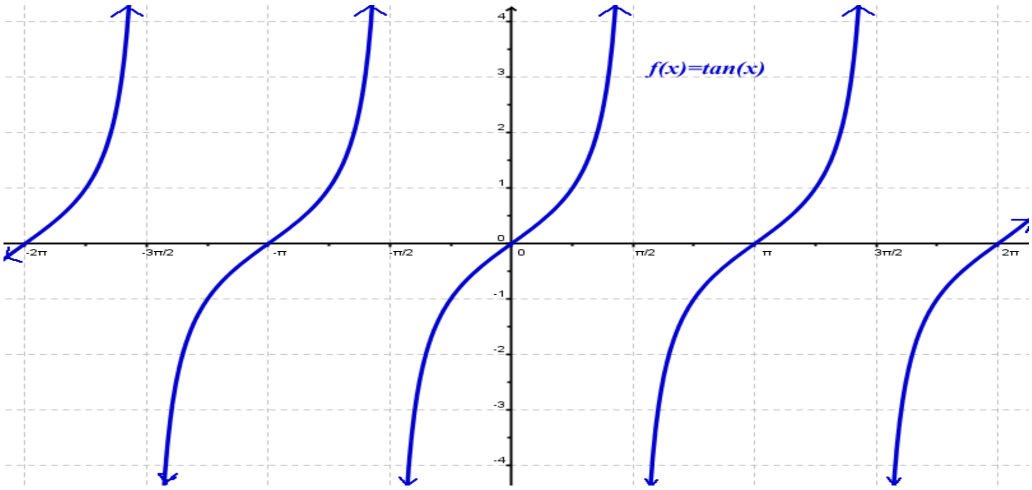
De la misma manera como se construye la gráfica de la función $f(x) = senx$, la gráfica de la función $f(x) = cosx$ viene dada por la siguiente figura.



- ***Df:*** ______________________________.
- ***Rf:*** ______________________________.
- ***Período:*** $2\pi\ rad$
- ***Par:*** $cos(-x) = cosx$

Función tangente

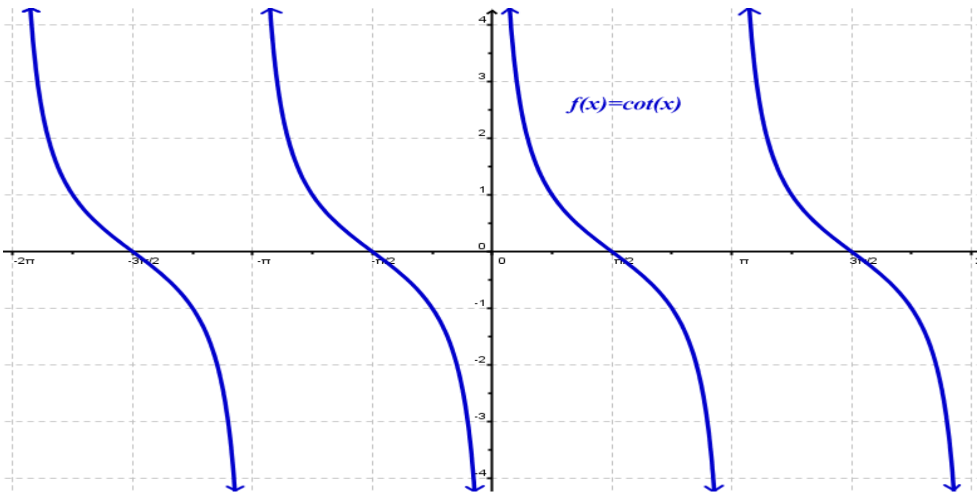
Partiendo del hecho de que la función tangente es una función racional, dado que se define como el cociente entre seno y coseno, podemos dibujar la función valiéndonos de las imágenes de esos ángulos y de las asíntotas verticales que posee la función justo en los valores que el coseno se hace cero.



- ***Df:*** $\mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in Z\}$.
- ***Rf:*** ______________________________.
- ***Período:*** $\pi\ rad$
- ***Impar:*** $tan(-x) = -tanx$

Función cotangente

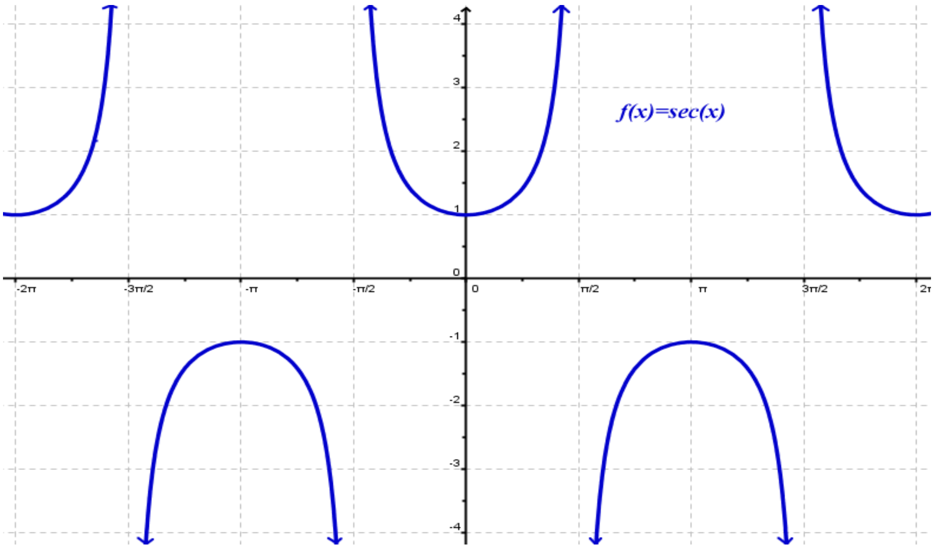
Partiendo del hecho de que la función cotangente es una función racional, dado que se define como el cociente entre coseno y seno, podemos dibujar la función valiéndonos de las imágenes de esos ángulos y de las asíntotas verticales que posee la función justo en los valores que el seno se hace cero.



- ***Df:*** $\mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in Z\}$.
- ***Rf:*** ______________________________.
- ***Período:*** π *rad*
- ***Impar:*** *cot(-x)= -cotx*

Función secante

Partiendo del hecho de que la función secante es una función racional, dado que se define como el cociente entre uno y coseno, podemos dibujar la función valiéndonos de las imágenes de esos ángulos y de las asíntotas verticales que posee la función justo en los valores que el coseno se hace cero.

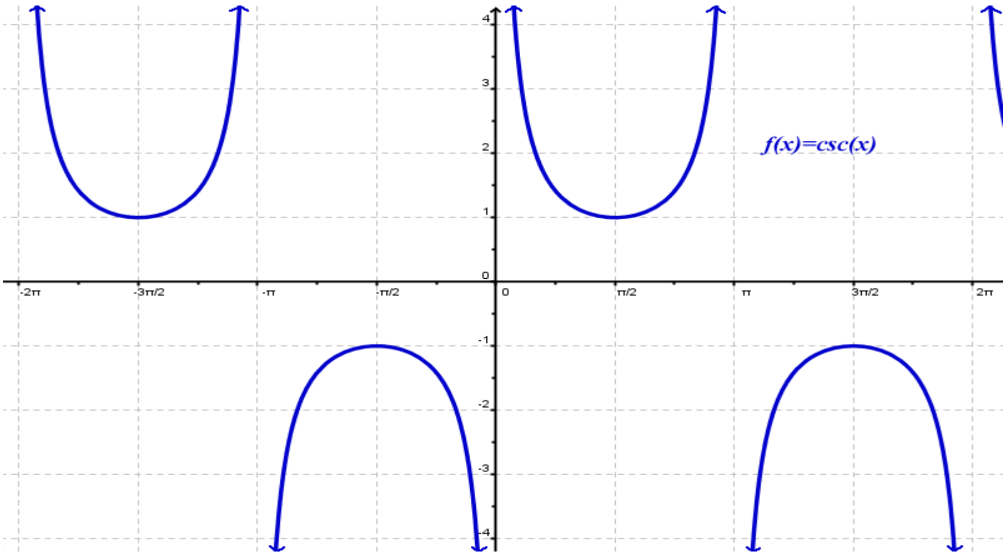


- ***Df:*** $\mathbb{R} - \{(2k + 1)\pi/2;\ k \in Z\}$.
- ***Rf:*** ______________________________.

- ***Período:*** *2π rad*
- ***Par:*** *sec(-x)= secx*

Función cosecante

Partiendo del hecho de que la función cosecante es una función racional, dado que se define como el cociente entre uno y seno, podemos dibujar la función valiéndonos de las imágenes de esos ángulos y de las asíntotas verticales que posee la función justo en los valores que el seno se hace cero.



- ***Df:*** $\mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in Z\}$.
- ***Rf:*** ______________________________.

- ***Período:*** *2π rad*
- ***Impar:*** *csc(-x)= -cscx*

4.4. TRANSFORMACIONES

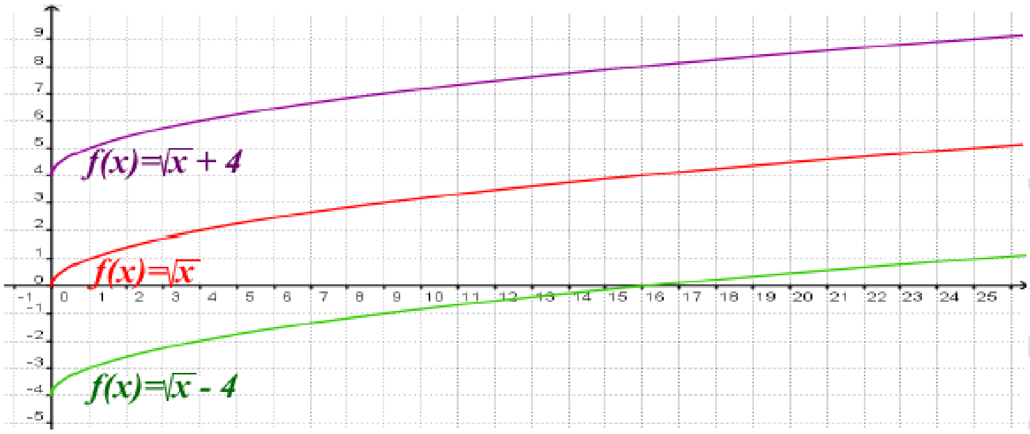
Sea *f(x)* una función y $c \in Df$.

4.4.1. Traslaciones verticales

Si *c > 0*, entonces la gráfica de *f(x) + c* es una traslación de *f, c* unidades hacia ***arriba.***

Si *c < 0*, entonces la gráfica de *f(x) + c* es una traslación de *f, c* unidades hacia ***abajo.***

Ejemplo:

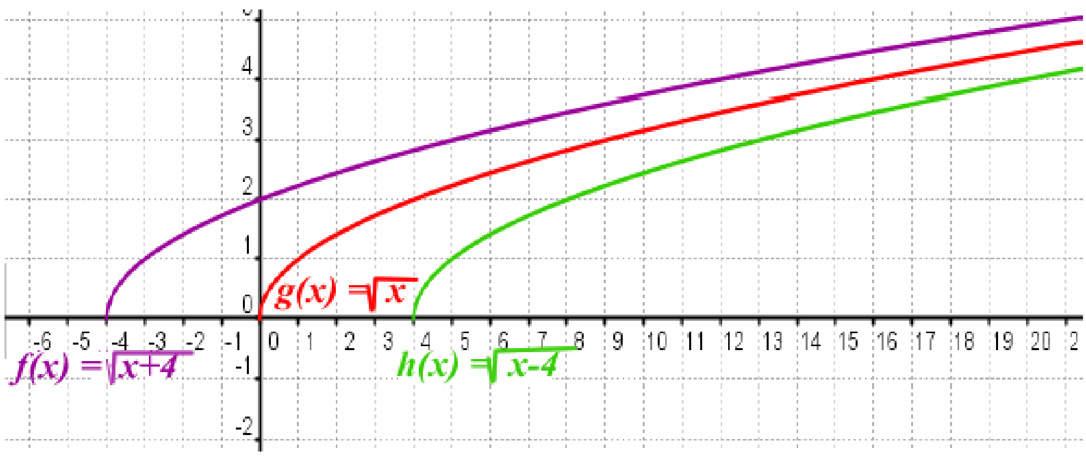


4.4.2. Traslaciones horizontales

Si *c > 0*, entonces la gráfica de *f(x + c)* es una traslación de *f, c* unidades hacia la ***derecha.***

Si *c < 0*, entonces la gráfica de *f(x + c)* es una traslación de *f, c* unidades hacia la ***izquierda.***

Ejemplo:



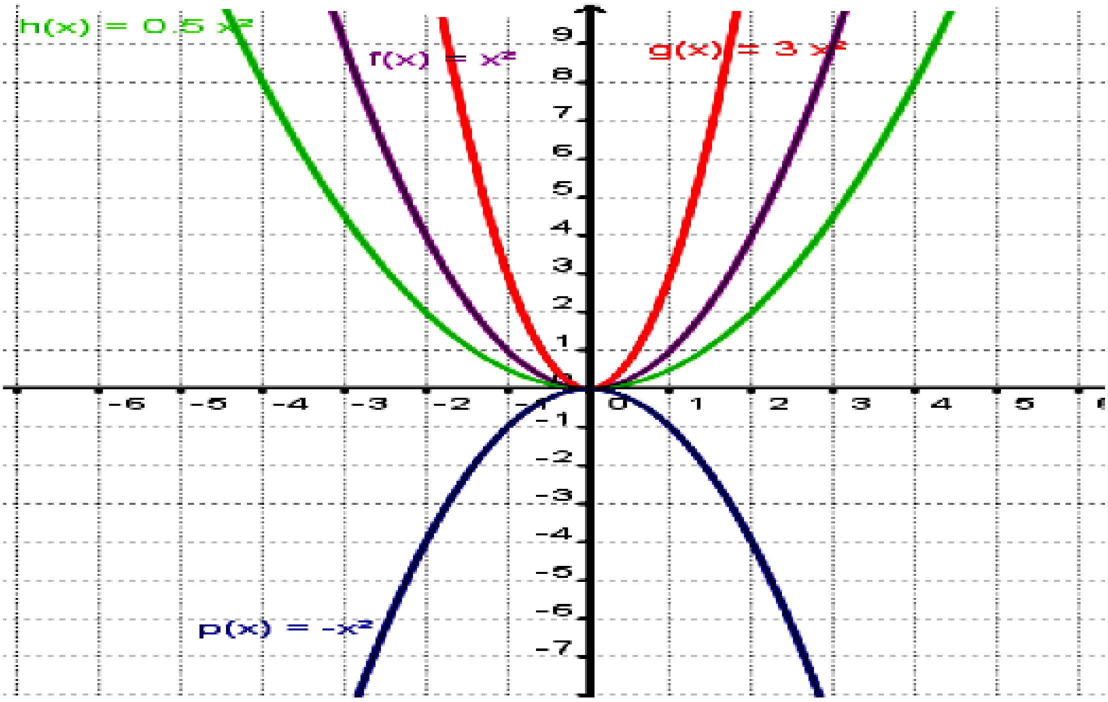
4.4.3. Expansiones, Contracciones y Reflexiones

Si $c > 1$, entonces la gráfica de $cf(x)$, es un ***alargamiento vertical*** de la gráfica de f por un factor de c unidades.

Si $0 < c < 1$, entonces la gráfica de $cf(x)$, es un ***ensanchamiento vertical*** de la gráfica de f por un factor de c unidades.

Si $c < 0$ entonces $cf(x)$ es una ***reflexión*** sobre el eje x de la función f.

Ejemplo:



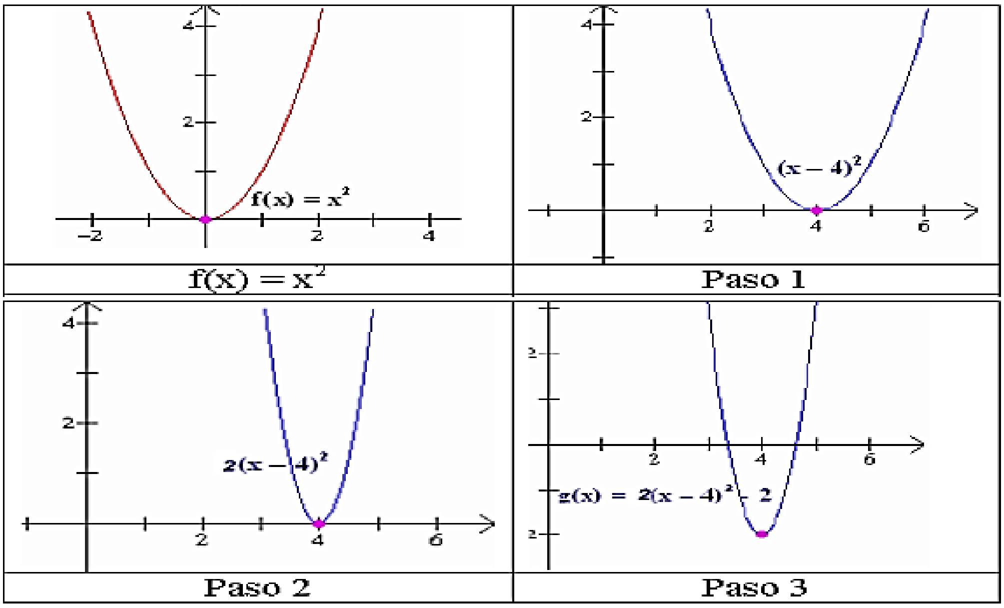
Ejemplo:

Graficar $g(x) = 2(x - 4)^2 - 2$, utilizando transformaciones.

Observar que la función g se puede obtener a partir de la función $f(x) = x^2$ en tres pasos:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow (x-4)^2 \Rightarrow 2(x-4)^2 \Rightarrow 2(x-4)^2 - 2 = g(x).$$

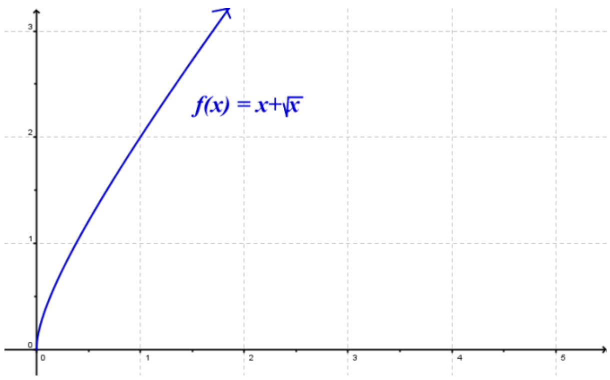
El primer paso traslada la gráfica de f horizontalmente, 4 unidades hacia la derecha;
el paso 2, alarga verticalmente la función f desde el eje x por un factor de 2;
el paso 3 traslada verticalmente a la función f, 3 unidades hacia abajo.



4.5. ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Dos funciones reales f y g pueden combinarse para formar nuevas funciones: suma, diferencia, producto y cociente:

SUMA	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$Dom(f+g)=Dom(f)\bigcap Dom(g)$
DIFERENCIA	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$Dom(f-g)=Dom(f)\bigcap Dom(g)$
PRODUCTO	$(fg)(x)=f(x)g(x)$	$Dom(fg)=Dom(f)\bigcap Dom(g)$
COCIENTE	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$Dom\left(\dfrac{f}{g}\right)=\left(Dom(f)\bigcap Dom(g)\right)-\{x/g(x)\neq 0\}$



Ejemplo: Sean $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x}$

Dado que Df = $(-\infty;\infty)$ y $Dg = [0;\infty)$.

Entonces, para:

$(f+g)(x) = x+\sqrt{x}$.

$D(f+g) = [0;\infty)$.

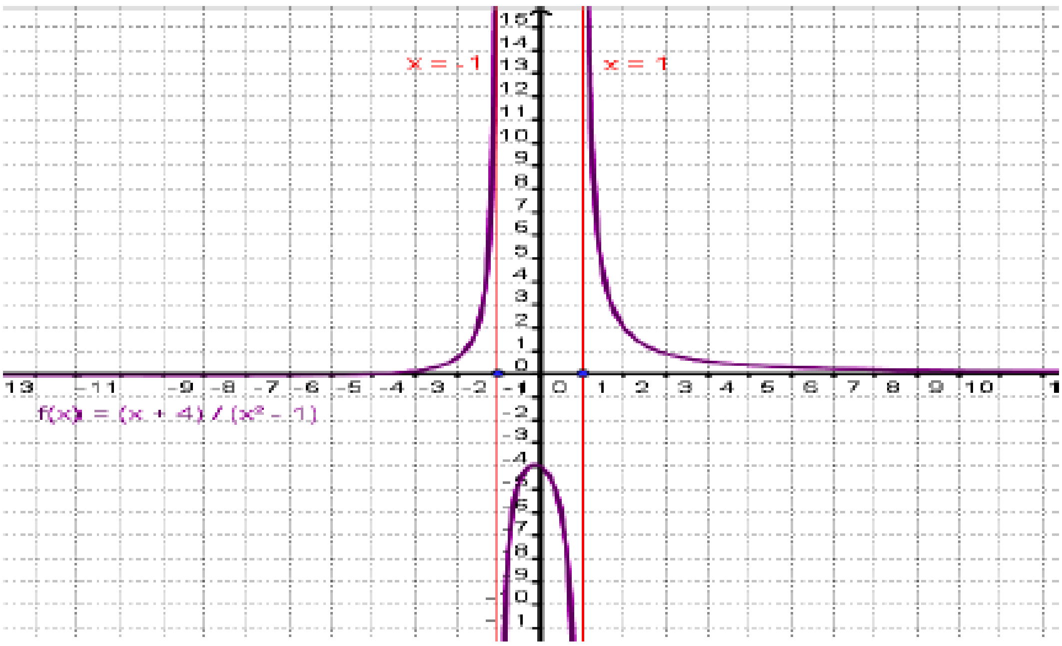
Ejemplo: Si $f(x) = x + 4$ y $g(x) = x^2 - 1$.

Dado que Df y *Dg* son los números reales.

Y la función $g(x)$ es cero para $x = 1$ y $x = -1$.

Entonces, para $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+4}{x^2-1}$

$D\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.



4.6. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Se sabe que la notación $g(a)$ significa el valor de la función $g(x)$ cuando $x = a$; se obtiene al sustituir a por x, siempre que x aparezca en la expresión de $g(x)$.

Si $f(x)$ es una función, entonces $g(f(x))$ es la función que se obtiene al sustituir $f(x)$ en lugar de x, siempre que esta ocurra en la expresión de $g(x)$. La función $g(f(x))$ es llamada la compuesta de g con f y se utiliza el símbolo operacional $\circ$ para denotar la compuesta de g con f Así:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

De la misma manera, se define:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Ejemplo: Sean *f(x)* =*x* y *g(x)* = *2x*- *3*. Encuentre $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x-3) = \sqrt{2x-3}$$
$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} - 3.$$

4.7. FUNCIÓN INYECTIVA, SOBREYECTIVA Y BIYECTIVA

4.7.1. Función Inyectiva

Una función *f* se llama inyectiva (o uno a uno) si no existen dos elementos de su dominio con una misma imagen. Esto es:

$$f(x_1) \neq f(x_2)\ siempre\ que\ x_1 \neq x_2$$

Otra forma de expresarlo es: *f* es uno a uno si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$.

Criterio de la recta horizontal: *Una función es uno a uno si y solo si ninguna recta horizontal corta a su grafica más de una vez.*

Ejemplo: Determinar si la función

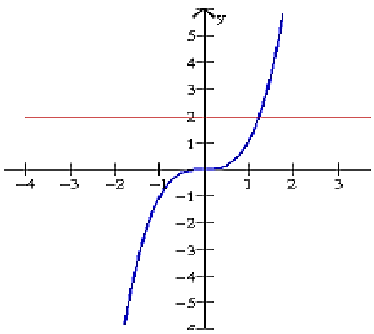
$f(x) = x^3$ es uno a uno.

Si $x_1 \neq x_2$ entonces $x_1^3 \neq x_2^3$

(Dos números diferentes no pueden tener potencias cúbicas iguales).

Por lo tanto $f(x) = x^3$ es uno a uno.

Observe que cualquier línea horizontal que se trace sobre la curva toca únicamente un punto de ella.



4.7.2. Función Sobreyectiva

Una función es sobreyectiva cuando cada uno de los elementos del rango es imagen de uno o varios elementos del dominio.

Ejemplo: Para la función: *f (x)* = *3x*- *5* los resultados serán todos los números negativos y positivos desde el menos infinito hasta el más infinito. Luego, esta función es sobreyectiva.

4.7.3. Función Biyectiva

Una función f es biyectiva si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

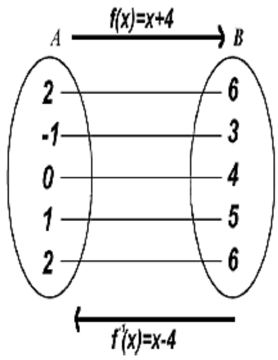
Ejemplo: *f(x) = 3x - 2,* es biyectiva.

4.8. FUNCIÓN INVERSA

Se llama función inversa de f a otra función f^{-1} que cumple que:

Si $f(a) = b$ entonces $f^{-1}(b) = a$. Siempre que f sea inyectiva.

Ejemplo:



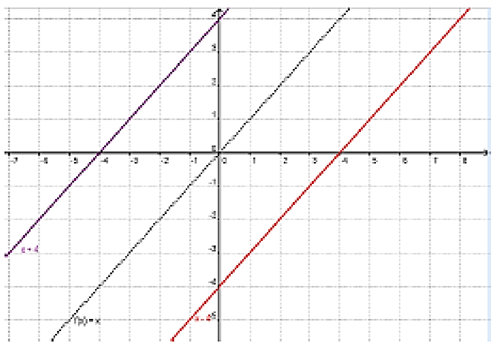
Se puede observar que: $Dom f^{-1} = Ran f$ y $Dom f = Ran f^{-1}$

Observación 1: Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la recta $f(x) = x$ (función identidad).

Observación 2: Si dos funciones son inversas su composición es la función identidad.

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = x$$

Ejemplo: Determine $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$. $f(x) = x+4$ y $f^{-1}(x) = x - 4$.
Para las funciones dadas en la gráfica.



Cálculo de la función inversa:

1. Se escribe la ecuación de la función con *x* e *y*.
2. Se despeja la variable *x* en función de la variable *y*.
3. Se intercambian las variables.

Ejemplo: Calcular la función inversa de:

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}.$$

1. $y = \frac{2x+3}{x-1}.$

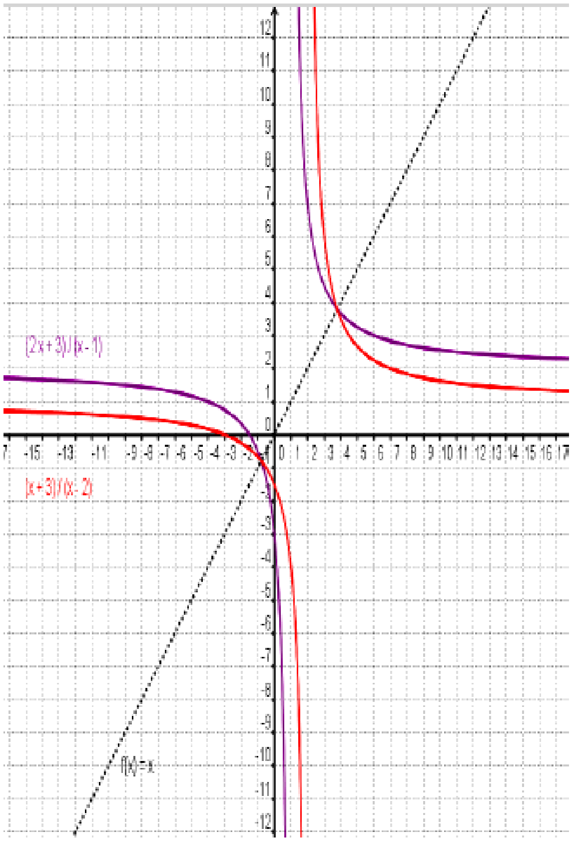
2. $y(x-1) = 2x+3$
   $xy - y = 2x+3$
   $xy - 2x = 3+y$
   $x(y-2) = 3+y$
   $x = \frac{3+y}{y-2}$

3. $f^{-1}(x) = \frac{3+x}{x-2}$

- Se comprueba el resultado para $x = 2$ (Cualquier punto del dominio de la función $f(x)$):

  $f(2) = 7$ y $f^{-1}(7) = 2$

- Se comprueba el resultado mediante la composición de la función f con su inversa f^{-1}:



4.8.1. Funciones trigonométricas inversas.

Las funciones trigonométricas son todas funciones periódicas. Así las gráficas de ninguna de ellas pasa la *prueba de la línea horizontal* y tampoco son 1-a-1. Esto significa que ninguna de ellas tiene una inversa a menos que el dominio de cada una esté restringido.

Ya que las gráficas son periódicas, si escogemos un dominio adecuado podemos usar todos los valores del rango.

Si restringimos el dominio de *f(x)* = *sinx* a $\left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ hemos hecho la función 1-a-1. El rango es [–1, 1].

Se denota la función inversa como $y = sin^{-1}x$. Y significa que *y* es el ángulo de número real cuyo valor de seno es *x*.

Se debe tener cuidado con la notación usada. El superíndice "–1" NO es un exponente. Para evitar esta notación, algunos libros usan *y* = *arcsinx* como notación.

Para graficar la inversa de la función seno, recuerde que la gráfica es una reflexión sobre la recta $y = x$ de la función seno.

Similarmente, se puede restringir los dominios de las funciones *coseno* y *tangente* para hacerlas 1-a-1.