Álgebra y Trigonometría (CNM-108)

Clase 8 – Geometría analítica: parábolas, elipses e hipérbolas

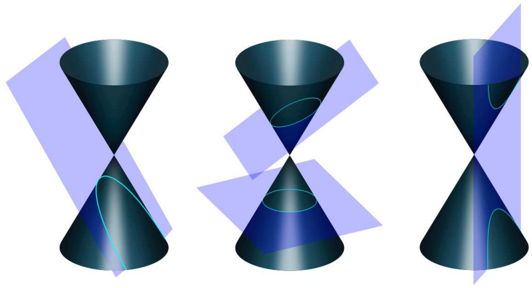
Departamento de Matemáticas
http://ciencias.udea.edu.co/
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Antioquia

Índice

1. Parábolas

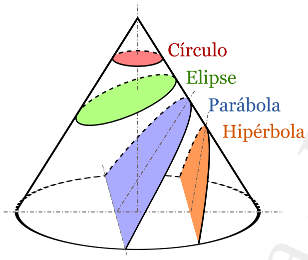
1.1. Secciones cónicas

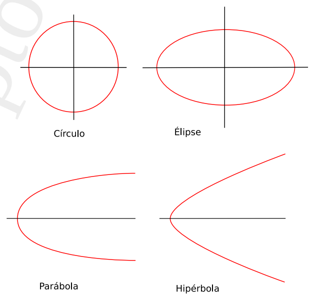
- Surgen al intersecar la superficie de un cono con un plano



- Dependiendo de la posición del plano obtenemos:

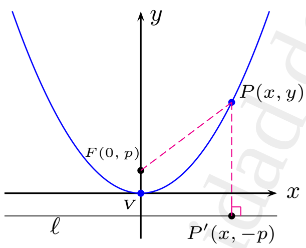
  - Círculo
  - Elipse
  - Parábola
  - Hipérbola





1.2. Definición

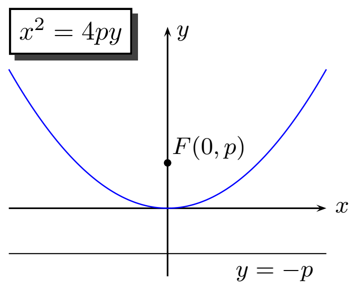
Definición 1.1 (Parábola)**.** *Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos en un plano que equidistan de un punto fijo F (el **foco**) y una recta fija ℓ (la **directriz**) que están en el plano.*

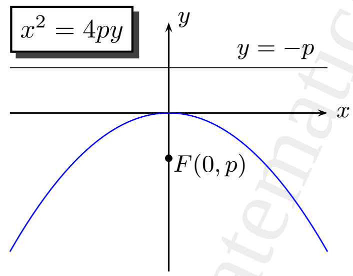


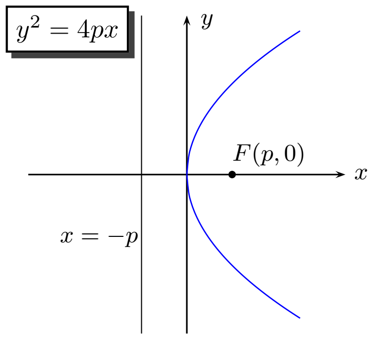
$$\begin{aligned} d(P,F) &= d(P,P') \\ \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} &= \sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2} \\ x^2+y^2-2py+p^2 &= y^2+2py+p^2 \\ x^2 &= 4py \end{aligned}$$

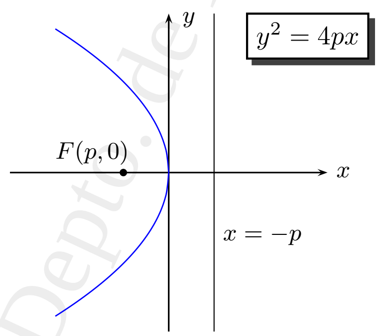
$$\boxed{x^2=4py} \quad \text{ó} \quad \boxed{y=\frac{1}{4p}x^2}$$

1.3. Parábolas con vértice $V(0,0)$









1.4. Determinación del foco y la directriz de una parábola

Ejemplo 1.1. *Encuentre el foco y la directriz de la parábola*

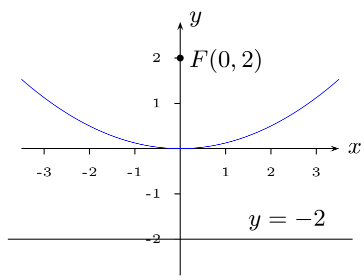
$$8y = x^2$$

y trace su gráfica.

Solución

- Ecuación:

$$\begin{aligned} 8y &= x^2 \\ y &= \underbrace{\frac{1}{8}}_{a} x^2 \end{aligned}$$



- Foco:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4p} \\ 4p &= \frac{1}{a} \\ p &= \frac{1}{4a} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{8}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

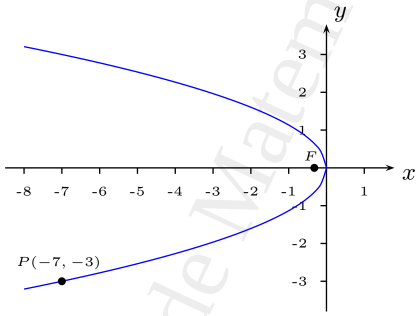
1.5. Determinación de la ecuación de una parábola

Ejemplo 1.2. *Determine la ecuación de una parábola que tiene vértice en el origen, abre a la izquierda y pasa por el punto* $P(-7,-3)$.

Solución

- Ecuación

$$\begin{aligned} x &= ay^2 \\ -7 &= a(-3)^2 \\ -7 &= 9a \\ -\tfrac{7}{9} &= a \\ x &= -\frac{7}{9}y^2 \end{aligned}$$

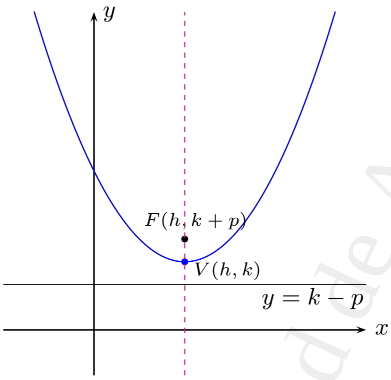


- Foco:

$$p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4\left(-\frac{7}{9}\right)} = -\frac{1}{\frac{28}{9}} = -\frac{9}{28} = -0{,}321428571$$

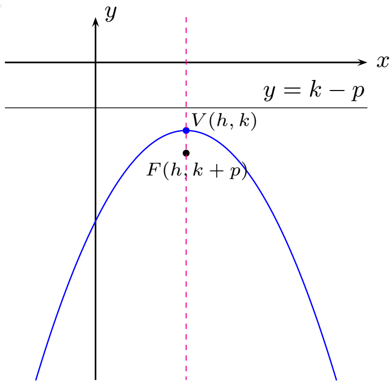
1.6. Parábolas con vértice $V(h,k)$

$$\boxed{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$$



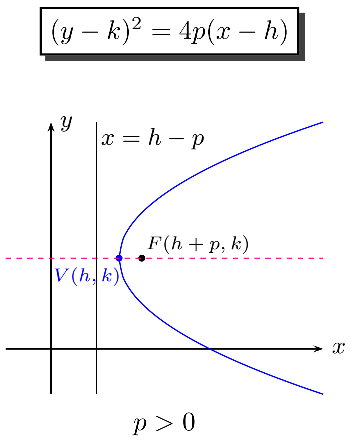
$p > 0$

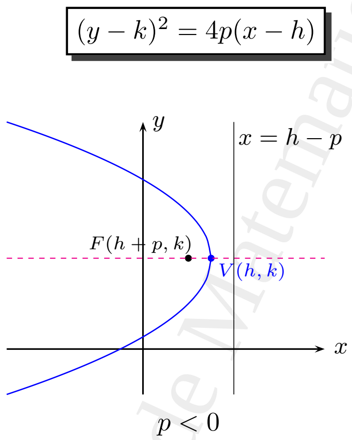
$$\boxed{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$$



$p < 0$

1.7. Parábolas con vértice $V(h,k)$





1.8. Trazado de una parábola con eje horizontal

Ejemplo 1.3. *Trace la gráfica de*

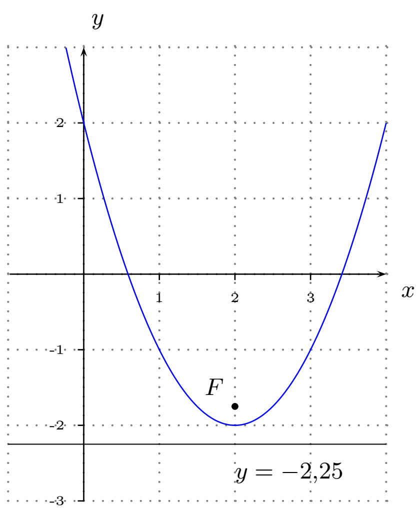
$$y = x^2 - 4x + 2$$

Solución

- Ecuación

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 2 \\ y - 2 &= x^2 - 4x \\ y - 2 + (?) &= x^2 - 4x + (?) \\ y - 2 + \left(\tfrac{-4}{2}\right)^2 &= x^2 - 4x + \left(\tfrac{-4}{2}\right)^2 \\ y - 2 + 4 &= x^2 - 4x + 4 \\ y + 2 &= (x-2)^2 \end{aligned}$$

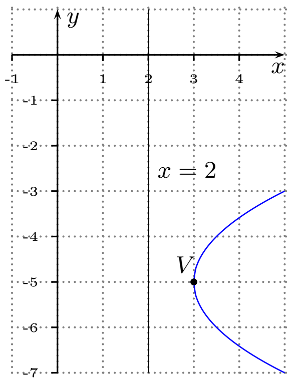
- $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
  - $h = 2,\ k = -2$ y $4p = 1 \Rightarrow p = 1/4$
  - $V(h,k) = V(2,-2)$
  - $F(h, k+p) = F\left(2, -2 + \frac{1}{4}\right) = F\left(2, -\frac{7}{4}\right)$



1.9. Determinación de una parábola dados su vértice y directriz

Ejemplo 1.4. *Determine la ecuación de la parábola que tiene como vértice a* $V(3,-5)$ *y directriz* $x = 2$

Solución



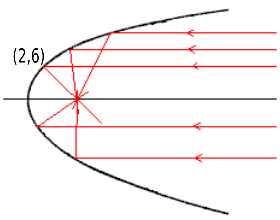
- $h = 3$
- $k = -5$
- $x = h - p \quad \Rightarrow \quad 2 = 3 - p \quad \Rightarrow \quad p = 1$

$$
\begin{aligned}
(y-k)^2 &= 4p(x-h) \\
(y-(-5))^2 &= 4(x-3) \\
(y+5)^2 &= 4(x-3)
\end{aligned}
$$

1.10. Ejemplo de aplicación

Ejemplo 1.5. *El radiotelescopio mostrado en la figura en forma de paraboloide tiene un diametro de 120 metros y una profundidad de 20 metros. Éste concentra los haces de las señales que inciden de manera paralela al eje de la parábola en un receptor situado en el foco. Encuentre la distancia desde el centro del disco hasta el receptor.*

Solución

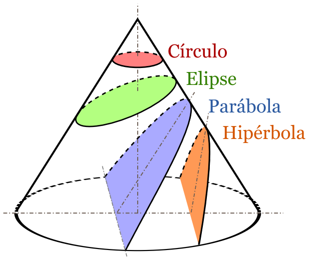


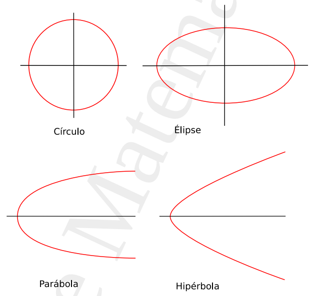
$$
\begin{aligned}
y^2 &= 4px \\
60^2 &= 4p \cdot 20 \\
3600 &= 80p \\
&\Downarrow \\
p &= \tfrac{360}{8} = 45 \text{ metros}
\end{aligned}
$$

2. Elipses

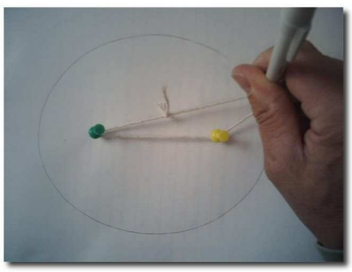
2.1. Secciones cónicas

- Posibilidades:
  - Círculo
  - Elipse
  - Parábola
  - Hipérbola



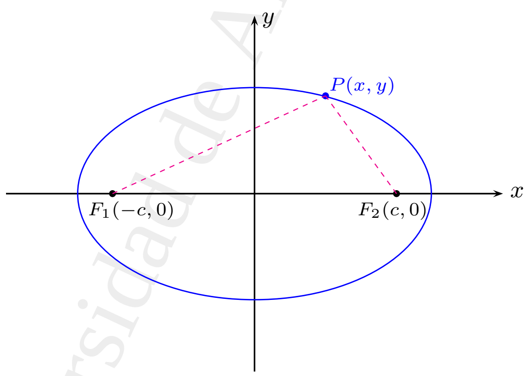


- Las elipses se pueden generar...



2.2. Definición

Definición 2.1 (Elipse)**.** *Una* ***elipse*** *es el conjunto de todos los puntos en un plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados* ***focos*** *es una constante positiva*

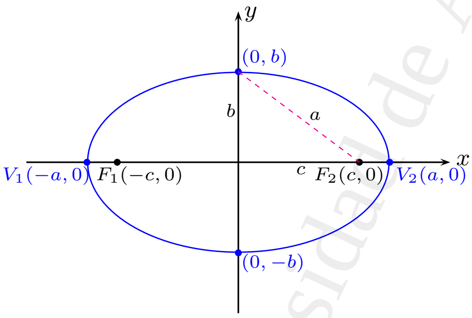


2.3. Ecuación de la elipse

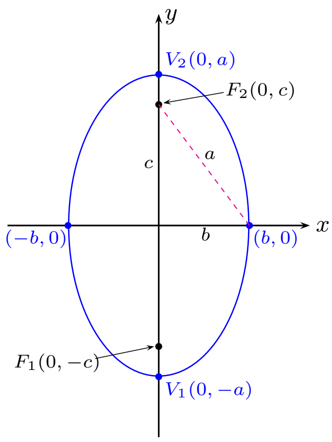
$$
\begin{aligned}
d(F_1,P)+d(F_2,P) &= 2a\\
\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} &= 2a\\
\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\\
(x-c)^2+y^2 &= \left(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2\\
x^2-2xc+c^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2\\
x^2-2xc+c^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2\\
4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 4a^2+4xc\\
a\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= a^2+xc\\
a^2\left((x+c)^2+y^2\right) &= \left(a^2+xc\right)^2\\
a^2\left(x^2+2xc+c^2+y^2\right) &= a^4+2a^2xc+x^2c^2\\
a^2x^2+2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2 &= a^4+2a^2xc+x^2c^2\\
\left(a^2x^2-x^2c^2\right)+a^2y^2 &= a^4-a^2c^2\\
x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2 &= a^2\left(a^2-c^2\right)\\
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2} &= 1\,,\quad \text{dividimos por } a^2\left(a^2-c^2\right)\\
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} &= 1\,,\quad b^2=a^2-c^2
\end{aligned}
$$

2.4. Elipses con centro $(0,0)$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$



$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1}$$



2.5. Ecuación estándar

Definición 2.2 (Elipse)**.** *La gráfica de una elipse con centro en el origen está dada por*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \acute{o} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\,, \quad a > b > 0$$

- *Longitud del eje mayor:* $2a$
- *Longitud del eje menor:* $2b$
- $c^2 = a^2 - b^2$
- *Los focos están a una distancia* c *del origen*

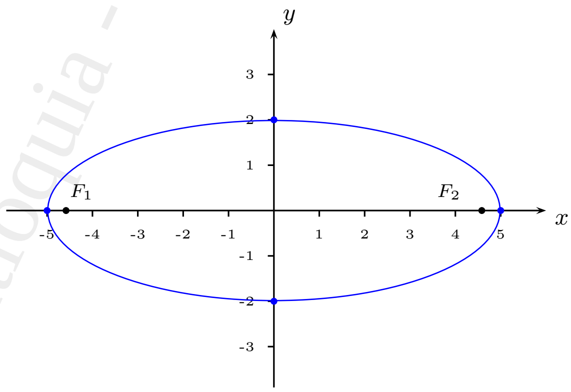
2.6. Trazado de una elipse con centro en el origen

Ejemplo 2.1. *Trace la gráfica de* $4x^2 + 25y^2 = 100$ *y halle sus focos.*

Solución

- Intersecciones en x:

$$\begin{aligned} y = 0 &\implies 4x^2 = 100 \\ &\implies x = \pm 5 \end{aligned}$$



- Interseciones en y:

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies 25y^2 = 100 \\ &\implies y = \pm 2 \end{aligned}$$

- Ejes:

$2 < 3 \implies$ eje mayor sobre el eje x

- Focos:

$$\begin{aligned} a = 5 \;\; b = 2 &\implies c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21 \\ &\implies c = \sqrt{21} \end{aligned}$$

2.7. Trazado de una elipse con centro en el origen

Ejemplo 2.2. *Trace la gráfica de* $9x^2 + 4y^2 = 36$ *y halle sus focos.*

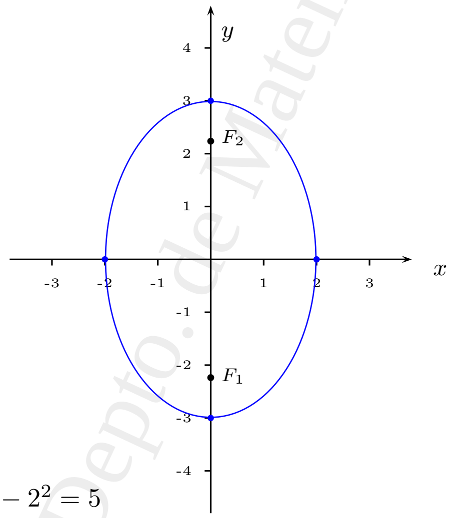
Solución

- Intersecciones en x

$$\begin{aligned} y &= 0 \implies 9x^2 = 36 \\ &\implies x = \pm 2 \end{aligned}$$

- Interseciones en y

$$\begin{aligned} x &= 0 \implies 4y^2 = 36 \\ &\implies y = \pm 3 \end{aligned}$$



- Ejes

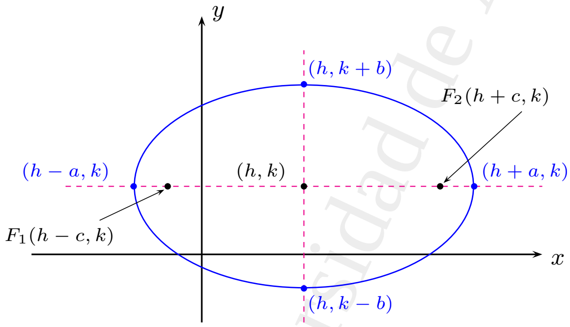
$$2 < 3 \implies \text{eje mayor sobre el eje } y$$

- Focos

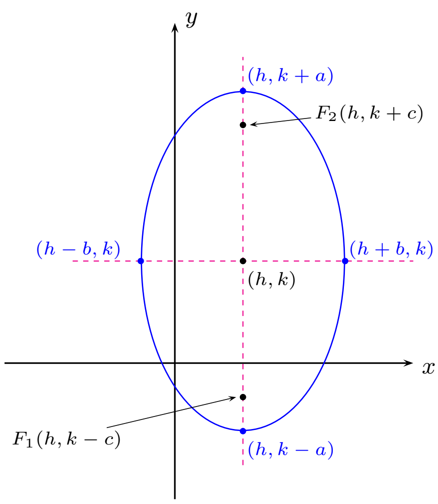
$$\begin{aligned} a = 3\,,\ b = 2 &\implies c^2 = a^2 - b^2 = c^2 = 3^2 - 2^2 = 5 \\ &\implies c = \sqrt{5} \end{aligned}$$

2.8. Elipses con centro (h, k)

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$



$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1}$$



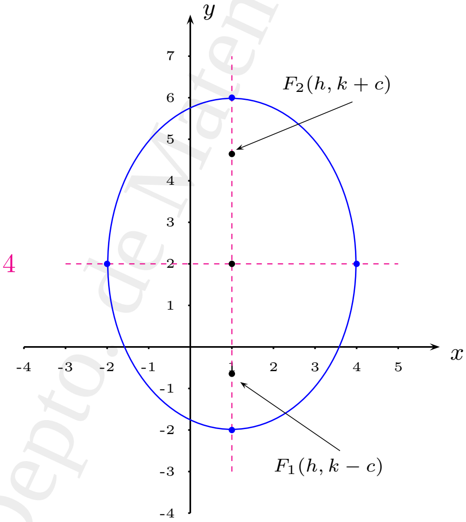
2.9. Trazado de una elipse con centro (h, k)

Ejemplo 2.3. *Trace la gráfica de*

$$16x^2 + 9y^2 - 32x - 36y - 92 = 0$$

Solución

$$\begin{aligned}
16x^2 + 9y^2 - 32x - 36y - 92 &= 0 \\
(16x^2 - 32x) \ + \ (9y^2 - 36y) &= 92 \\
16(x^2 - 2x) \ + \ 9(y^2 - 4y) &= 92 \\
16(x^2 - 2x + ?) \ + \ 9(y^2 - 4y + ?) &= 92 \\
16(x^2 - 2x + 1) \ + \ 9(y^2 - 4y + 4) &= 92 + 16 \cdot 1 + 9 \cdot 4 \\
16(x-1)^2 \ + \ 9(y-2)^2 &= 144 \\
\frac{16(x-1)^2}{144} + \frac{9(y-2)^2}{144} &= 1 \\
\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} &= 1
\end{aligned}$$



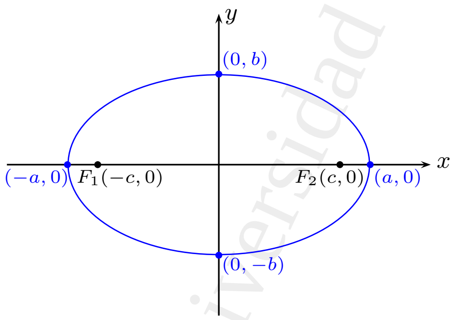
2.10. Excentricidad

Definición 2.3 (Excentricidad)**.** *La* ***excentricidad*** e *de una elipse está dada por*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

donde

- a*: semieje mayor*
- b*: semieje menor*
- c*: distancia del centro de la elipse a cualquiera de los focos*



Observaciones

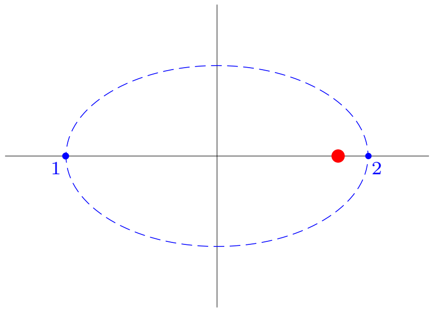
- $0 \leq e < 1$:

$$\begin{aligned}
0 \leq c < a \quad &\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{c}{a} < 1 \\
&\Rightarrow \quad 0 \leq e < 1
\end{aligned}$$

- $e \approx 0 \implies$ elipse "circular"
- $e \approx 1 \implies$ elipse muy "plana"

2.11. Aplicaciones

Proposición 2.1 (Primera ley de Kepler)**.** *Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos.*



1. **Afelio**: punto más distante al Sol sobre la trayectoria

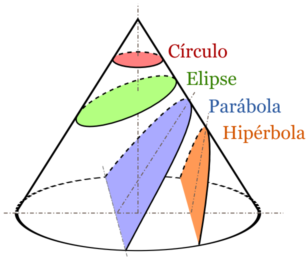
2. **Perihelio**: punto más cercano al Sol sobre la trayectoria

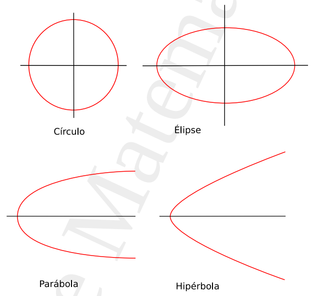
3. **Distancia media**: longitud del semieje mayor de la órbita elíptica descrita por el planeta.

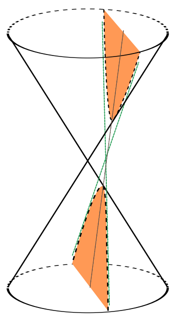
3. Hipérbolas

3.1. Secciones cónicas

- Posibilidades:
  - Círculo
  - Elipse
  - Parábola
  - Hipérbola

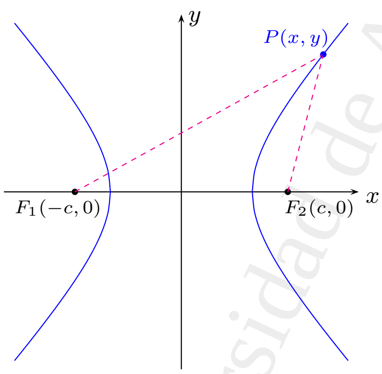






3.2. Definición

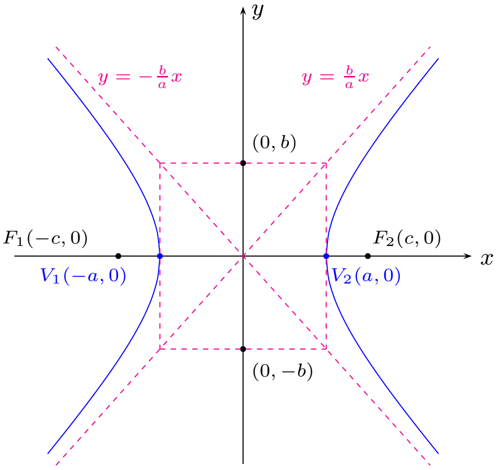
Definición 3.1 (Hipérbola)**.** *Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos en un plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados **focos** es una constante positiva*

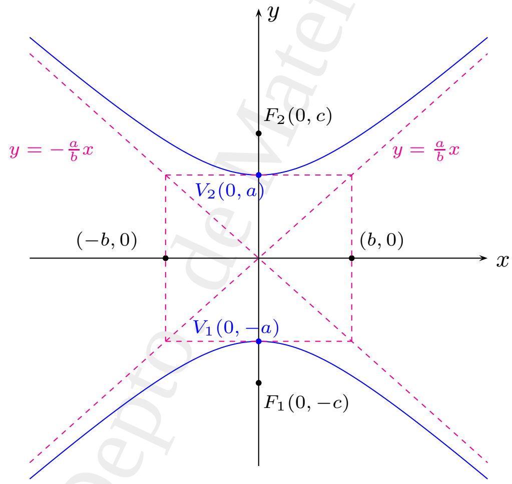


$$
\begin{aligned}
|d(F_1,P) - d(F_2,P)| &= 2a \\
&\vdots \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} &= 1 \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1
\end{aligned}
$$

3.3. Hipérbolas con centro $(0, 0)$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$





3.4. Ecuación estándar

Proposición 3.1. *La gráfica de una hipérbola con centro en el origen está dada por*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

- *Longitud del* ***eje transverso****:* $2a$
- *Longitud del* ***eje conjugado****:* $2b$
- $c^2 = a^2 + b^2$
- *Los focos están a una distancia* c *del origen*

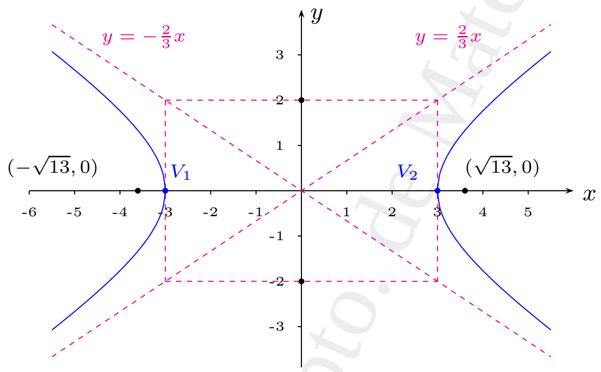
3.5. Trazado de una hipérbola con centro en el origen

Ejemplo 3.1. *Trace la gráfica de* $4x^2 - 9y^2 = 36$ *y halle sus focos.*

Solución

- Ecuación estándar:

$$
\begin{aligned}
4x^2 - 9y^2 &= 36 \\
\frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} &= 1 \\
\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} &= 1
\end{aligned}
$$



$$a^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad a = 3$$
$$b^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{13}$$

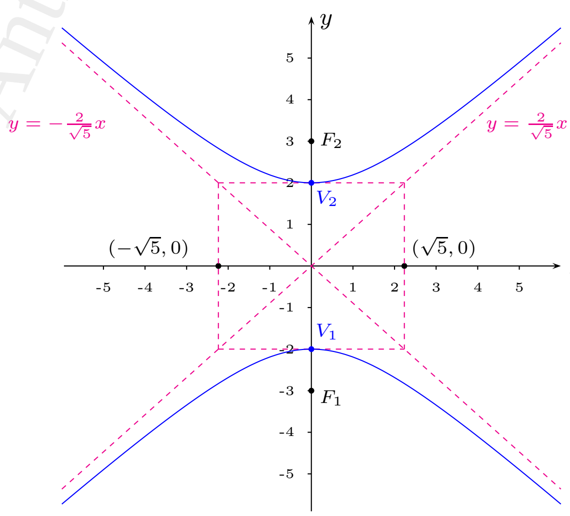
3.6. Trazado de una hipérbola con centro en el origen

Ejemplo 3.2. *Trace la gráfica de*

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

Solución

- Ecuación estándar:



$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

$$a^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$
$$b^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 5 = 9 \quad \Rightarrow \quad c = 3$$

3.7. Determinación de una hipérbola con condiciones dadas

Ejemplo 3.3. *Una hipérbola tiene como vértices* $(\pm 5, 0)$ *y pasa por* $P\left(5\sqrt{5}, 14\right)$*. Determine su ecuación, focos y asíntotas.*

Solución

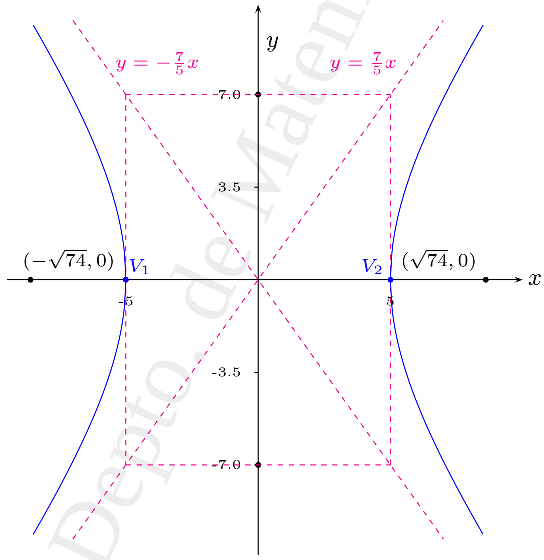
- Ecuación estándar:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- $P\left(5\sqrt{5}, 14\right)$ está en la hiperbola:

$$\begin{aligned} \frac{(5\sqrt{5})^2}{25} - \frac{(14)^2}{b^2} &= 1 \\ 5 - \frac{196}{b^2} &= 1 \\ 4 &= \frac{196}{b^2} \\ b^2 &= \frac{196}{4} = 49 \end{aligned}$$

- $c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 49 = 74 \;\Rightarrow\; c = \sqrt{74}$



3.8. Hipérbola con centro (h, k)

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$